

Table des matières

1	Transformée de Fourier sur un groupe fini	1
1.1	Dual d'un groupe fini	2
1.1.1	Définitions	3
1.1.2	Dual d'un groupe cyclique	5
1.2	Dual d'un groupe abélien	6
1.2.1	Approche algébrique	7
1.2.2	Théorème d'isomorphisme	8
1.2.3	Le bidual	9
1.2.4	Relations d'orthogonalité	10
1.3	Dual d'un groupe non commutatif	11
1.3.1	Exemple du groupe symétrique	11
1.3.2	Utilisation du groupe dérivé	13
1.4	Transformée de Fourier	14
1.4.1	Transformée de Fourier sur un groupe abélien	15
1.4.2	Algèbre d'un groupe abélien	16
1.4.3	Convolution et transformée de Fourier	17
1.5	Exercices	18
2	Applications de la transformée de Fourier sur un groupe fini	21
2.1	Sommes de Gauss	21
2.1.1	Résidus quadratiques	21
2.1.2	Caractères additifs et multiplicatifs	23
2.1.3	Sommes de Gauss	26
2.1.4	La réciprocité quadratique	30
2.2	Transformée de Walsh	34
2.2.1	Présentation	34
2.2.2	Algorithme de calcul rapide	36
2.2.3	Utilisation de la transformée de Walsh	37
2.3	Formule de Poisson	37
2.3.1	La formule sur un groupe fini abélien	37
2.3.2	Application aux identités de MacWilliams	41
2.3.3	La formule de Poisson continue	44
2.4	Exercices	47
3	Transformée de Fourier discrète	55
3.1	Le langage du traitement du signal	55
3.2	Transformée de Fourier rapide	57
3.2.1	Présentation de l'algorithme	57

3.2.2	Analyse du coût	60
3.2.3	Variations autour de l'algorithme	61
3.2.4	La transformation de Cooley-Tukey	62
3.2.5	Implémentation concrète	63
3.2.6	Décimation fréquentielle	65
3.2.7	Ecriture matricielle	67
3.3	Convolution circulaire	67
3.3.1	Convolution circulaire	67
3.3.2	Calcul avec la FFT	69
3.3.3	Convolution acyclique	69
3.4	En dimension supérieure	71
3.4.1	Transformée de Fourier discrète en 2D	71
3.4.2	Convolution 2D	73
3.5	Symétrie et transformée discrète	74
3.5.1	Propriétés de symétrie	75
3.5.2	Valeurs propres de la TFD	75
3.6	Exercices	76
4	Applications de la transformée de Fourier discrète	83
4.1	Lien avec la transformée de Fourier sur \mathbb{R}	83
4.1.1	Transformée de Fourier continue	83
4.1.2	Calcul approché de la transformée de Fourier sur \mathbb{R}	85
4.1.3	Ajout de zéros	87
4.1.4	Dualité temps/fréquence	87
4.2	Filtrage	88
4.2.1	Filtres linéaires	88
4.2.2	Types de réponses et stabilité	89
4.2.3	Filtrage 2D et analyse d'image	92
4.3	Aspects géométriques du filtrage	92
4.3.1	Filtrage de polygones	93
4.3.2	Inégalités polygonales	95
4.3.3	Descripteurs de Fourier	96
4.4	Résolution d'équations aux dérivées partielles	97
4.4.1	Calcul de coefficients de Fourier	97
4.4.2	Application à l'équation de la chaleur	99
4.4.3	Résolution de l'équation de Poisson par différences finies	101
4.5	Calculs de produits	104
4.5.1	Présentation théorique	104
4.5.2	Multiplication de polynômes modulo $X^N - 1$	106
4.5.3	Multiplication de polynômes	107
4.5.4	Multiplication de grands entiers	108
4.6	Exercices	108
5	Extension de la notion de transformée de Fourier	117
5.1	Transformée de Hartley	117
5.1.1	Définition et premières propriétés	118
5.1.2	Transformée de Hartley rapide	119
5.1.3	Calcul de convolution par transformée de Hartley	120
5.2	Transformée en \mathbb{Z} et applications	121
5.2.1	Définition et propriétés formelles	122

5.2.2	Filtres récurrents	123
5.2.3	Application à la construction de filtres	127
5.2.4	Rapprochement avec le filtrage analogique	129
5.3	Transformée en Z vectorielle	131
5.3.1	Algorithme de calcul discret	131
5.3.2	Applications à la transformée de Fourier discrète	133
5.4	Transformée de Fourier fractionnaire	134
5.4.1	Définition et algorithme de calcul	134
5.4.2	Analyse de signaux à périodicité non entière	135
5.5	Exercices	137
6	Transformée de Fourier à valeurs dans un corps fini	143
6.1	Calculs sur un corps fini	143
6.1.1	Transformée de Fourier sur un corps fini	143
6.1.2	Un cas particulier	144
6.1.3	Corps cyclotomiques	145
6.1.4	Transformée sur un corps cyclotomique	147
6.1.5	Calculs effectifs	148
6.2	Calculs sur un anneau	149
6.2.1	Racines principales de l'unité	149
6.2.2	Implémentation d'un algorithme FFT	151
6.3	Application aux codes correcteurs	152
6.3.1	Notion de code correcteur	152
6.3.2	Présentation des codes linéaires	155
6.3.3	Codes cycliques	159
6.3.4	Construction des codes BCH	160
6.3.5	Décodage par transformée de Fourier	163
6.4	Codes correcteurs et dualité sur un groupe fini	165
6.4.1	Polynômes énumérateurs de poids	166
6.4.2	Algèbre d'un groupe et codes correcteurs	167
6.4.3	Etude combinatoire de codes quelconques	169
6.5	Exercices	172
7	Représentations linéaires des groupes finis	177
7.1	Premières définitions	178
7.1.1	Représentations linéaires	178
7.1.2	Exemples fondamentaux	180
7.1.3	Représentations irréductibles	182
7.1.4	Le groupe symétrique	184
7.2	Invariance et représentations	187
7.2.1	Sous représentation invariante	187
7.2.2	Lemme de Schur	188
7.2.3	Opérateur de Reynolds	189
7.2.4	Application moyennée	190
7.3	Caractères	191
7.3.1	Définition et premières propriétés	191
7.3.2	Relations d'orthogonalité	193
7.4	Représentations et dénombrement	194
7.4.1	Décomposition d'une représentation	194
7.4.2	Résultats de dénombrement	195

7.5	Théorie de Fourier	196
7.5.1	Transformée de Fourier	196
7.5.2	Espace des fonctions centrales	198
7.5.3	Séries de Fourier	200
7.5.4	Transformée de Fourier et caractères	201
7.6	Exercices	203
8	Applications des représentations linéaires	211
8.1	Représentation de groupes classiques	211
8.1.1	Table des caractères	211
8.1.2	Les groupes cycliques	212
8.1.3	Les groupes diédraux	213
8.1.4	Le groupe \mathfrak{S}_4	214
8.2	La question de la simplicité	216
8.2.1	Noyau des caractères	216
8.2.2	Utilisation de la table des caractères	217
8.2.3	Représentations induites	218
8.3	Analyse spectrale	218
8.3.1	Orthogonalité des fonctions coordonnées	218
8.3.2	Séries de Fourier généralisées	220
8.3.3	Exemples	221
8.4	Exercices	221
A	Listings de code Matlab	225
A.1	Algorithme FWT	225
A.2	Algorithme FHT	225
A.3	Algorithme FFT	225
A.4	Multiplication de grands entiers par FFT	227
A.5	Résolution de l'équation de Poisson	231
A.6	Résolution de l'équation de la chaleur	231
B	Listings de code Maple	235
B.1	Transformée sur un corps fini	235
B.2	Transformée sur un anneau	235
B.3	Multiplication de grands entiers	235
B.4	Décodage des codes BCH	238
B.5	Détermination de l'anneau des polynômes invariants	238