Gabriel Peyré

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier

Préface

La vocation de ce livre est d'aborder les différentes notions gravitant autour de l'algèbre discrète de Fourier. Chaque lecteur pourra se faire un programme « à la carte », et puiser dans des énoncés clairs ou des listings de code des informations précises pour asseoir ses connaissances dans le domaine, ou les appliquer à des problèmes plus concrets.

L'exposé est volontairement très détaillé, et ne nécessite que peu de connaissances préalables, mentionnées au début des chapitres concernés. Ainsi, le lecteur pourra avoir besoin de façon ponctuelle de quelques notions avancées sur les groupes finis ainsi qu'une certaine familiarité avec les actions de groupes. Par exemple, un élève agrégatif devrait pouvoir trouver de nombreuses applications et développements autour du programme officiel. Nul doute qu'un bon élève de licence devrait pouvoir aborder cet exposé sans grande difficulté.

Je n'ai pas hésité à répéter les définitions et notations importantes. Par exemple, la notion de convolution, abordée sous de nombreux angles (groupe abélien, traitement du signal, groupe non commutatif), est à chaque fois replacée dans son contexte. Ainsi, les différents paragraphes, bien que suivant une progression logique, ont une vraie unité et peuvent être lus de façon non linéaire.

Le premier chapitre utilise le langage de la théorie des groupes pour expliquer les notions principales et démontrer les énoncés dont il sera fait usage par la suite. Le deuxième chapitre constitue un exposé sur la transformée de Fourier discrète, et même s'il réinvestit les résultats du chapitre précédent, il peut être lu par exemple par un informaticien souhaitant comprendre les mécanismes des algorithmes de transformées discrètes. Le troisième chapitre présente des applications diverses de la transformée de Fourier discrète, et constitue un complément indispensable du chapitre précédent, pour bien comprendre les mécanismes mis en jeu ainsi que leur utilisation dans des situations pratiques. Le quatrième chapitre décline des idées et des algorithmes plus originaux autour de la transformée de Fourier, donnant lieu à de nombreuses applications. Il nécessite quelques connaissances un peu plus poussées, notamment un peu de familiarité avec la théorie des corps finis. Les deux derniers chapitres, les plus difficiles, sont de nature plus algébrique, et se proposent de généraliser les constructions déjà effectuées au cas des groupes finis non commutatifs. Le cinquième chapitre présente la théorie des représentations linéaires. Le sixième et dernier chapitre applique cette théorie dans des champs à la fois théoriques (étude de la simplicité des groupes) et pratiques (analyse spectrale).

En ce qui concerne les listings de programmes qui sont présentés, il sont rédigés en Matlab pour la plupart, et en Maple pour ceux nécessitant des manipulations algébriques (calculs dans les corps finis, etc.). Bien qu'étant des logiciels payants, on peut trouver des versions pour les étudiants à un prix raisonnable, et de nombreuses facultés et écoles d'ingénieurs en sont équipées. De plus, des logiciels gratuits à la syntaxe très proche existent, principalement SCILAB et MUPAD. Toutes les références de ces logiciels sont regroupées à l'appendice B. Le choix d'un langage particulier pour implémenter les algorithmes est bien évidemment discutable, mais le choix de MATLAB et MAPLE semble assez naturel, car ces logiciels permettent de tester rapidement les programmes écrits, quitte à les traduire par la suite dans un langage compilé et plus rapide, tel que le C ou le C++. De plus, ces langages sont utilisés pour l'épreuve de modélisation à l'oral de l'agrégation de mathématiques, les agrégés ou futurs agrégés ne seront donc pas dépaysés. Il est à noter que la totalité des scripts présents dans cet ouvrage sont disponibles au téléchargement, ainsi que de nombreux autres, sur le site `http://nikopol0.alrj.org/livre`.