Liste des leçons d'analyse

Gabriel Peyré

Le 5 octobre 2002

1 Liste des développements

1.1 Méthodes de projection pour les équations intégrales

Définition 1.1. Méthode de projection On se donne X et Y deux espaces de *Banach* , ainsi que $A : X \to Y$ un opérateur borné injectif. Pour $f \in A(X) \subset Y$, on cherche à approximer la solution du problème :

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } A\varphi = f \tag{1}$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ de dimension finie n, ainsi que des projecteurs $P_n : Y \to Y_n$. On considère alors le problème approché :

$$\text{trouver } \varphi_n \in X_n \text{ tel que } P_n A\varphi_n = P_n f \tag{2}$$

Cette méthode de projection est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $f \in A(X)$, l'équation approchée (2) admet une unique solution $\varphi_n \in X_n$, et que cette solution converge vers la solution φ de (1), ie. $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$.

Remarque. Cette condition de convergence peut s'exprimer plus simplement en fonction de l'opérateur $A_n = P_n A : X_n \to Y_n$. Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible (ie que le système linéaire obtenu est inversible), et que de plus, on a une convergence ponctuelle :

$$A_n^{-1}(P_n f) = A_n^{-1}(P_n(A\varphi)) = (P_n A)^{-1} P_n A\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$$

Il faut bien sûr garder à l'esprit que l'opérateur A_n est défini sur X_n alors que l'opérateur composé $P_n A$ est défini sur X tout entier. Ainsi, l'opérateur $(P_n A)^{-1} P_n A$ n'est pas l'identité (c'est justement notre but : approcher l'identité à l'aide de cet opérateur), il faut tenir compte des ensembles de départ et d'arrivée !

Théorème 1.1. Banach-Steinhaus *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs* bornés *$A_n : X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y. On suppose que la suite est bornée ponctuellement, ie que pour tout $\varphi \in X$, il existe une constante C_φ telle que $\|A_n\varphi\|_Y \leq C_\varphi$. Alors, la suite est bornée uniformément en norme, ie il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|A_n\| \leq C$.*

Corollaire 1.2. Continuité d'une limite ponctuelle *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs* bornés *$A_n : X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y. On suppose que cette suite converge ponctuellement vers un opérateur $A : X \to Y$, ie que $\forall \varphi \in X, A_n\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} A\varphi$. Alors l'opérateur A est à son tour borné.*

Proposition 1.3. Compacité et convergence uniforme *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs* bornés *$A_n : X \to Y$ entre un espace normé X et un espace de Banach Y. On suppose que la suite converge ponctuellement* *vers un opérateur $A : X \to Y$ (à son tour borné grâce au corollaire 1.2). Alors, la convergence est uniforme en norme sur tout ensemble compact $U \subset X$, ie :*

$$\sup_{\varphi \in U} \|A_n\varphi - A\varphi\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Proposition 1.4. Convergence ponctuelle et convergence en norme *On considère une suite $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs bornés $L_n : Y \to Z$, avec Z un espace normé et Y un espace de Banach. On suppose de plus que cette suite converge ponctuellement vers un opérateur $L : Y \to Z$ (lui aussi borné). On se donne aussi un opérateur compact borné $A : X \to Y$, où X est un espace vectoriel normé quelconque. Alors on a convergence en norme de la suite d'opérateurs bornés compacts $L_nA : X \to Z$ vers l'opérateur LA, ie :*

$$\|(L_n - L)A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Remarque. Dans la suite, on se place dans le cadre où les espaces X_n sur lesquels on projette possèdent la propriété de densité en norme, ie :

$$\forall\varphi \in X,\ \inf_{\psi\in X_n} \|\psi - \varphi\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

ce qui est bien sûr une condition nécessaire pour espérer pouvoir construire des méthodes convergentes (et qui n'est pas loin d'être suffisante, comme le montre le résultat suivant).

Théorème 1.5. CNS de convergence des méthodes de projection *On se place dans le cadre de densité décrit par* (3)*. Une méthode de projection pour un opérateur $A : X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y converge **si et seulement si** il existe un rang n_0 à partir duquel les opérateurs de dimension finie $P_nA_n : X_n \to Y_n$ sont inversibles et si les opérateurs d'approximation $(P_nA)^{-1}P_nA : X \to X_n$ sont uniformément bornés, i.e. :*

$$\exists M > 0, \forall n \geq n_0, \|(P_nA)^{-1}P_nA\| \leq M \tag{4}$$

Dans ce cas, on a une estimation de l'erreur commise en approchant $\varphi \in X$ par la solution approchée $\varphi_n = (P_nA)^{-1}P_nA\varphi$:

$$\|\varphi - \varphi_n\|_X \leq (1 + M) \inf_{\psi\in X_n} \|\psi - \varphi\| \tag{5}$$

Remarque. Dans la suite, on considère un opérateur compact $A : X \to X$ sur un espace de *Banach* X, tel que $I - A$ soit injectif, et l'on cherche à résoudre l'équation de *Fredholm*, pour $f \in Im(A) = A(X)$:

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{tel que } \varphi - A\varphi = f \tag{6}$$

Pour approcher la solution, on n'a besoin que d'une suite X_n d'espaces de dimension finie n, ainsi que de projecteurs $P_n : X \to X_n$, ce qui conduit à la résolution de l'équation en dimension finie :

$$\text{trouver } \varphi_n \in X_n \text{tel que } \varphi_n - P_nA\varphi_n = P_nf \tag{7}$$

Si l'on suppose $I - A$ injectif et $f \in (I - A)(X)$, c'est ce que l'on appellera une méthode de projection pour $I - A$.

Théorème 1.6. Convergence pour les équations de Fredholm du second type *On suppose que $A : X \to X$ est borné compact sur X un espace de Banach, et tel que $I - A$ soit injectif. On suppose de plus que les projecteurs P_n convergent ponctuellement, ie que $\forall\varphi \in X, P_n\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$. Alors la méthode de projection pour $I - A$ détaillée en* (7) *converge.*

Référence : [Kre99, p.100]
Utilisation : (***,4) (**,5) (*,1)
Mots clefs : dimension finie, espaces complets, opérateurs compacts, méthodes de quadrature, approximation, projection.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	***
204	Espaces complets. Exemples et applications.	***
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	***
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	***
202	Utilisation de la notion de compacité.	**
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**
234	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.	**
236	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.	**
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**
208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	*

1.2 Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales

Référence : [Kre99, p.100]
Utilisation : (***,7) (**,2) (*,0)
Mots clefs : théorème d'Ascoli, équi-continuité, dimension finie, espaces complets, opérateurs compacts, méthodes de quadrature, approximation, projection.

202	Utilisation de la notion de compacité.	***
207	Utilisation de la continuité uniforme en analyse.	***
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	***
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	***
234	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.	***
236	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.	***
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	***
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	**
231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.	**

1.3 Théorème des lacunes de Hadamard

Référence : [ZQ95, p.54]
Utilisation : (***,4) (**,3) (*,0)
Mots clefs : fonctions holomorphes, fonctions analytiques, séries entières, prolongement de fonction, points singuliers.

206	Prolongement de fonctions. Applications.	***
241	Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.	***
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.	***
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	***
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	**
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.	**
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	**

1.4 Résolution de l'équation de la chaleur

Voici les principales approches :

- *Equation de la chaleur sur le cercle :* Il s'agit de résoudre le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0\leq x\leq 1 \qquad u(0,.)=f,\qquad \text{avec } f\in\mathcal{C}^1(S^1)$$

  On cherche une solution sour la forme : $u(t,x)=\sum c_n(t)e_n(x)$ (à t fixé, la fonction cherchée est 1-périodique). Les coefficients sont $c_n(t)=\int_0^1 u(t,x)e_n^*(x)dx$, et donc vérifient

$$\frac{dc_n(t)}{dt}=\int_0^1\frac{\partial u}{\partial t}e_n^*=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e_n^*=\frac{1}{2}\int_0^1 u\frac{\partial^2 e_n^*}{\partial x^2}=-2\pi^2n^2c_n$$

  Ce qui donne donc : $c_n=\widehat{f}(n)e^{-2\pi^2n^2t}$. Il este à vérifier que la fonction u ainsi construite est bien $\mathcal{C}^2$, que l'on peut dériver sous le signe somme, ce qui est assuré par convergence normale sur tout intervalle compact $[\varepsilon,M]\times S^1$. Le fait que $u(0,.)=f$ résulte du fait que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc que la série de Fourier de f converge absolument vers f. On note aussi que l'on peut exprimer la solution de la manière suivante : $u(t,x)=p_t\star f(x)$, avec $p_t(x)=\sum e^{-2\pi^2n^2t}e_n(x)$.
- *Equation de la chaleur sur un segment :* Cette fois-ci il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur sur [0,1], lorsque l'on impose en plus la condition $u(t,0)=u(t,1)=0$. La bonne méthode est de se ramener à l'étude précédente en complétant par imparité et périodicité u en fonction 2π-périodique impaire. L'unicité résulte soit d'un principe du maximum pour les équations de la chaleur, soit d'une l'étude énergétique.
- *Equation de la chaleur de la terre :* Il s'agit cette fois de trouver une fonction $u(t,x)$, qui, pour $x\leq 0$ fixé est périodique. On suppose connue $u(t,0)=f(t)$, et on recherche la solution sous la forme $u(t,x)=\sum c_n(x)e_n(t)$. Les coefficients c_n vérifient alors l'équation $\frac{dc_n(t)}{dt}=\sqrt{2\pi|n|}(1\pm\imath)^2$. Comme on suppose $|c_n|\leq\|u\|_\infty\leq\|f\|_\infty$ qu'on suppose fini, la seule solution est $c_n(x)=\widehat{f}(n)\exp(-\sqrt{2\pi|n|}(1\pm\imath)x)$. En particulier la réponse à l'harmonique $e_n=e^{2\imath\pi nt}$ est à la fois amortie et déphasée.

Référence : [ZQ95, p.103][DMK72, p.63]

Utilisation : (***,5) (**,1) (*,0)

Mots clefs : équations aux dérivées partielles, séries de Fourier, principe du maximum, séries de fonctions, interversion de limites.

211	Méthodes hilbertiennes.	***
212	Bases hilbertiennes. Exemples et applications.	***
216	Utilisation de la transformation de Fourier et des séries de Fourier pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.	***
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	***
245	Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.	***
218	Problèmes d'extremums.	**

1.5 La fonction $\wp$ de Weierstrass

Référence : [Zis96, p.199]

Utilisation : (***,3) (**,3) (*,1)

Mots clefs : fonctions méromrophes, équation différentielle, série de fonctions, résidus.

239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	***
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	***
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	***
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.	**
229	Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries.	**
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	**
200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	*

1.6 Méthode de Newton

Référence : [Cia90, p.161][Cia90, p.98]
Utilisation : (***,4) (**,1) (*,1)
Mots clefs : résolution d'équations, extréma, comportement asymptotique.

205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	***
218	Problèmes d'extremums.	***
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	***
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	***
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**
222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	*

1.7 Théorème de Hadamard : une CNS de difféomorphie

Référence : [ZQ95, p.392][Gou94b, p.345]
Utilisation : (***,4) (**,0) (*,0)
Mots clefs : équations différentielles, difféomorphismes, connexité, inversion locale, application ouverte.

203	Connexité : exemples et applications	***
213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	***
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	***
219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	***

1.8 Théorème des familles normales et théorème de Cartan

Référence : [ZQ95, p.154]
Utilisation : (***,5) (**,3) (*,0)
Mots clefs : itérations, fonctions holomorphes, point fixe, dynamique holomorphe, uniforme continuité.

202	Utilisation de la notion de compacité.	***
205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	***
207	Utilisation de la continuité uniforme en analyse.	***
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	***
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	***
200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**
222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	**
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	**

1.9 Théorème de Borel

Théorème 1.7. Théorème de Borel *Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$.*

Lemme 1.8. Construction d'une fonction plateau *On cherche à construire $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\varphi(x) = 0$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$*

Démonstration. Soit $\psi_1(x) = e^{-1/x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. On montre par récurrence que ψ_1 est $\mathcal{C}^\infty$. On pose $\psi_2(x) = \psi_1(x)\psi_1(1-x)$, qui est à support dans [0,1]. Puis $\psi_3(x) = \left(\int_0^1 \psi_2\right)^{-1} \int_0^x \psi_2(t)dt$, qui est $\mathcal{C}^\infty$ avec $\psi_3(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\psi_3(x) = 1$ si $x \geq 1$. Enfin, $\psi(x) = \psi_3(2x+1)\psi_3(1-2x)$ convient. ☐

Référence : [CL93, p.27]
Utilisation : (***,0) (**,9) (*,1)
Mots clefs : formules de Taylor, série de fonctions, fonctions plateau, fonctions plates.

217	Applications des formules de Taylor.	**
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	**
226	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.	**
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.	**
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	**
241	Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.	**
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.	**
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	*

1.10 Suites équiréparties modulo 1

Référence : [Ale99, p.139]
Utilisation : (***,4) (**,2) (*,0)
Mots clefs : itération, densité, polynômes trigonométriques, séries de Fourier, suites numériques.

201	Exemples de parties denses et applications.	***
208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	***
222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	***
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	***
236	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.	**
245	Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.	**

1.11 Formule d'Euler-MacLaurin, applications

Voici les principaux résultats et applications :

Théorème 1.9. FORMULE D'EULER-MACLAURIN *Pour f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$, on note $T(f) = f(\alpha) + f(\alpha+1) + \ldots + f(\beta)$. On a :*

$$T(f) = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \sum_{m=1}^{k} \frac{b_{2m}}{(2m)!}\left(f^{(2m-1)}(\beta) - f^{(2m-1)}(\alpha)\right) - \int_\alpha^\beta \frac{B_{2k}(x)}{(2k)!} f^{(2k)}(x)dx$$

où les b_p sont les nombres de Bernouilli , définis par $b_p = B_p(0)$, avec le polynôme B_p définit par récurrence de la manière suivante : $B_0(x) = 1$ et $B_p'(x) = pB_{p-1}(x)$, $\int_0^1 B_p(x)dx = 0$.

Théorème 1.10. FORMULE ASYMPTOTIQUE *Pour f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\alpha,+\infty]$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$, on note $S_n(f) = f(\alpha) + \ldots + f(n)$. On suppose qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour $m \geq m_0$, $f^{(m)}$ soit de signe constant sur $[x_0,+\infty[$, avec de plus $f^m(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Alors il existe une constante C telle que pour $n \geq x_0$ et $k > \frac{m_0}{2}$:*

$$S_n(f) = C + \frac{1}{2}f(n) + \int_a^n f(x)dx + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(n) + R_{n,k} \quad \textit{avec :}$$

$$R_{n,k} = \theta \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) = \theta \times (\textit{1er terme omis}) \qquad \theta \in [0,1]$$

Application. FORMULE DE STIRLING *En appliquant la formule à $f(x) = ln(x)$ sur $[1,+\infty[$, on trouve :*

$$S_n(f) = \ln(n!) = C + \frac{\ln(n)}{2} + n(\ln(n) - 1) + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{b_{2m}}{2m(2m-1)} \frac{1}{n^{2m-1}}$$

On peut montrer que $e^c = \sqrt{2\pi}$, et on a par exemple :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{\theta}{1680n^7}\right)$$

Référence : [Dem96, p.77][Gou94b, p.295]
Utilisation : (***,13) (**,2) (*,0)
Mots clefs : méthodes de quadrature, développements asymptotiques, comportements asymptotiques, suites numériques, accélération de convergence, nombres de Bernouilli, fonction *zeta*.

217	Applications des formules de Taylor.	***
222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	***
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	***
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	***
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.	***
229	Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries.	***
231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.	***
233	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.	***
234	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.	***
235	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	***
236	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.	***
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	***
245	Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.	***
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	**
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	**

1.12 Théorème Tauberien fort

Référence : [Gou94b, p.285]
Utilisation : (***,11) (**,1) (*,0)
Mots clefs : séries entières, séries de fonctions, approximation polynomiale, comportement asymptotique.

206	Prolongement de fonctions. Applications.	***
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	***
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	***
226	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.	***
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.	***
229	Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries.	***
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	***
241	Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.	***
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.	***
246	Exemples de problèmes d'interversion de limites.	***
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	***
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	**

1.13 Hypercyclicité, critère de Kitaï

Référence : [GT96b, p.103]
Utilisation : (***,5) (**,2) (*,0)

Mots clefs : espace complet, théorème de Baire, séparabilité, densité, fonctions holomorphes.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	***
201	Exemples de parties denses et applications.	***
204	Espaces complets. Exemples et applications.	***
208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	***
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	***
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	**
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	**

1.14 Le théorème des nombres premiers

Référence : [Tos99, p.1129]
Utilisation : (***,3) (**,4) (*,2)
Mots clefs : nombres premiers, transformée de Laplace, transformée de Fourier, fonction ζ, intégrales dépendant d'un paramètre, développement asymptotique, fonctions à support compact.

233	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.	***
235	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	***
246	Exemples de problèmes d'interversion de limites.	***
206	Prolongement de fonctions. Applications.	**
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	**
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	**
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	**
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	*
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	*

1.15 Développement en série entière des solutions d'une équation différentielle du second ordre

Référence : [ZQ95, p.400]
Utilisation : (***,2) (**,6) (*,0)
Mots clefs : équation différentielle, séries entières, développement en série entière.

220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	***
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	***
219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	**
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	**
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	**
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	**
241	Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.	**
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.	**

1.16 Représentation conforme et fluides incompressibles

On note $w(x,y) = u(x,y) + \imath v(x,y)$ le champ de vitesses d'un fluide défini sur un domaine $G \subset \mathbb{C}$ (par exemple dont le bord est $\mathcal{C}^1$ par morceaux). On suppose qu'il est :

- *Incompressible :* pour toute courbe $\mathcal{C} \subset G$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $\int_{\mathcal{C}} w(x,y)_\tau ds = \int_{\mathcal{C}} udx + vdy = 0$, où l'on a noté $w_\tau = \langle w,\tau(s)\rangle$, avec $\tau = (\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds})$ le vecteur tangent.
- *Irrotationnel :* pour toute courbe $\mathcal{C} \subset G$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $\int_{\mathcal{C}} w(x,y)_\nu ds = \int_{\mathcal{C}} -vdx + udy = 0$, où l'on a noté $w_\nu = \langle w,\nu(s)\rangle$, avec $\nu = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$ le vecteur normal.

Par un théorème de calcul différentiel (cf. théorème 1.13), la nullité de ces deux intégrales curvilignes implique que $\overrightarrow{grad}(w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ et $\overrightarrow{rot}(w) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Les formules de Riemann montrent que la fonction $u - \imath v$

est holomorphe, et que les fonctions u et $-v$ sont des fonctions harmoniques conjuguées. On peut ainsi énoncer le résultat :

Proposition 1.11. Potentiel de flot *On suppose le flot défini sur un domaine $D \subset G$ simplement connexe. On peut alors construire une primitive f de $u - \imath v$, ie. $f'(z) = u - \imath v$. Si on note $f(z) = \varphi(x,y) + \imath\psi(x,y)$, on a :*

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \imath\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\imath\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = u - \imath v$$

D'où :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

De façon réciproque, la donnée d'un tel potentiel f défini un flot incompressible et irrotationnel.

Définition 1.2. Potentiel de flot et de vitesse On remarque que $\Delta\varphi$ est colinéaire à la vitesse du fluide, et que $\Delta\psi$ est orthogonal à la vitesse. D'où les appellations :

- Potentiel de vitesse pour φ : les lignes $\{\varphi = cste\}$ sont les lignes équipotentielles.
- Potentiel de flot pour ψ : les lignes $\{\psi = cste\}$ sont les lignes de flot (trajectoires du fluide).

Les lignes de flot et les lignes de vitesses forment deux familles de courbes orthogonales (sauf éventuellement aux points où le potentiel s'annule).

Remarque. Contraintes physiques Pour que le fluide soit physiquement réaliste, il faut que les vitesses sur le bord du domaine D soient tangentes aux parois, ce qui signifie que les parois ∂D soient des lignes de flot $\{\psi = cste\}$.

Exemple 1.3. Flot dans un coin Si on considère le flot donné par le potentiel $f(z) = z^2$, on a $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, $\psi(x,y) = 2xy$. Les lignes de flot et les lignes de vitesse forment deux familles orthogonales d'hyperboles équilatères. On constate que ce flot modélise de façon physiquement réaliste un flot dans un quart de plan.

Exemple 1.4. Flot passant un cylindre Si on considère le flot donné par le potentiel $f(z) = z^2$, on a $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, $\psi(x,y) = 2xy$. Les lignes de flot et les lignes de vitesse forment deux familles orthogonales d'hyperboles équilatères. Pour calculer un flot passant le disque $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on utilise la transformation de Joukowski $\lambda : z \mapsto \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$. On va montrer (cf. remarque 1.16), que c'est une application bi-holomorphe de U sur V^c, où $V = \{x + \imath y;\ y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$. Or, il est facile de déterminer un flot physiquement correct sur V^c, en prenant simplement pour ligne de flot les droites $Im(z) = cste$, ce qui conduit à considérer le potentiel $f_1(z) = z$. Donc le potentiel sur U va être donné par $f(z) = f_1(\lambda(z))$. Donc au final, les lignes de flot sont les courbes $\mathcal{C}_t : Im(f(x,y)) = y - \frac{y}{x^2+y^2} = 2t$, et on vérifie bien que $\mathcal{C}_0$ contient la paroi du disque.

Remarque. Fonction de Joukowski Pour montrer que la fonction λ est bien une transformation bi-holomorphe de U sur V^c (cf. [Mar65, T1 p.197]), on peut regarder l'image des cercles concentriques $\mathcal{C}_r : \{re^{\imath t; 0 \leq t < 2\pi}\}$. Comme $\lambda(re^{\imath t}) = \frac{1}{2}(r + 1/r)\cos(t) + \imath\frac{1}{2}(r - 1/r)\sin(t)$, les $\lambda(\mathcal{C}_r)$ sont des ellipses concentriques qui se referment sur V lorsque $t \to 1$.

Remarque. Formes différentielles Voir [Car61, p.49]. On note $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle, avec $P,Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ continues. On note aussi $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe, où $\gamma = (x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ On peut alors définir l'intégrale curviligne le long de γ par la formule de changement de variables : $\int_\gamma \omega := \int_a^b \gamma^*(\omega)$ où $\gamma^*(\omega) = f(t)dt$ et $f(t) = P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)$. Cette formule s'étend au cas où γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Proposition 1.12. Formes exactes *Si $\omega = dF$ avec $F : D \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_\gamma \omega = F(b) - F(a)$. On remarque que $\omega = dF$ signifie $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, ce qui implique les relations fondamentales $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Proposition 1.13. Formes fermées *Si P et Q admettent des dérivées partielles continues, alors $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$* ***ssi*** *$\omega$ est fermée (i.e. admet une primitive localement)* ***ssi*** *$\int_\gamma \omega = 0$ pour des chemins suffisamment petits.*

Référence : [Mar65, p.174][Car61, p.175][Rud87, p.326]
Utilisation : (***,3) (**,1) (*,0)
Mots clefs : fonctions holomorphes, fonctions harmoniques, connexité, représentation conforme.

215	Étude locale de courbes et de surfaces.	***
243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	***
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	***
203	Connexité : exemples et applications	**

1.17 Optimisation sous contraintes et théorème de Stampachia

Référence : [Cia90, p.202][Bre83, p.82]
Utilisation : (***,3) (**,2) (*,1)
Mots clefs : méthodes hilbertiennes, optimisation, itérations, point fixe.

211	Méthodes hilbertiennes.	***
218	Problèmes d'extremums.	***
227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	***
205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	**
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	**
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	*

1.18 Etude de l'équation différentielle de Voltera-Lotka

Référence : [Arn74, p.27 et 41]
Utilisation : (***,2) (**,0) (*,0)
Mots clefs : équation différentielle.

219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	***
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	***

1.19 Etude de l'inclusion $L^p \subset L^q$

Référence : [Rud87, p.146]
Utilisation : (***,2) (**,1) (*,0)
Mots clefs : Espaces L^p, Espaces fonctionnels, Théorème du graphe fermé.

231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.	***
232	Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$	***
200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**

1.20 Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes

Référence : [?]
Utilisation : (***,5) (**,0) (*,0)
Mots clefs : polynômes orthogonaux, transformée de Fourier, fonctions holomorphes.

212	Bases hilbertiennes. Exemples et applications.	***
232	Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$	***
233	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.	***
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	***
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	***

1.21 Théorème de Kolmogorov

Théorème 1.14. Inégalités de Kolmogorov *Soit* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *on pose* $M_p = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(p)}(x)|$. *On suppose que* $M_0 < \infty$ *et* $M_n < \infty$. *Alors :*

- $\forall p \in \{0,\ldots,n\}$, $M_p < \infty$
- $\forall m \in \{1,\ldots,n\}, \forall k \in \{0,\ldots,m\}$, $M_k \leq 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} M_m^{\frac{k}{m}}$

Référence : [Gou94b][CL93, p.49]
Utilisation : (***,2) (**,3) (*,0)
Mots clefs : fonction dérivable, formule Taylor.

217	Applications des formules de Taylor.	***
226	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.	***
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	**
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.	**

1.22 La méthode de Laplace

Théorème 1.15. Méthode de Laplace *Soit* $I =]a,b[$ *un intervalle (ouvert ou non),* $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$, *et* $\varphi \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$. *Soit la transformée de Laplace généralisée :*

$$F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x) dx$$

On suppose que :

(i) $\int_a^b e^{t\varphi(x)} |f(x)| dx < \infty$

(ii) $\exists ! x_0 \in I$ *tel que* $\varphi'(x_0) = 0$ *et* $\varphi''(x_0) < 0$ *(*x_0 *est un maximum strict).*

(iii) $f(x_0) \neq 0$

Alors, quand $t \to +\infty$ *:*

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} \frac{f(x_0)}{\sqrt{t}}$$

Application. Formule de Stirling *On cherche un équivalent de*

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t dx = \int_0^\infty t \log x - x dx = te^{t\log(t)} \int_0^\infty e^{t(\log(y)-y)} dy$$

Où l'on a fait, pour $t > 0$, *le changement de variable* $x = ty$. *On peut donc essayer d'appliquer la méthode de Laplace pour la fonction* $\varphi(y) = \log(y) - y$, $I =]0,\infty[$ *et* $x_0 = 1$ *puisque* $f'(t) = \frac{1}{y} - 1$ *et* $f''(1) = -1 < 0$. *D'où :*

$$\Gamma(t+1) \sim te^{t\log(t)} \frac{\sqrt{2\pi}}{|-1|} e^{t(-1)} \frac{}{\sqrt{t}} = \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$$

Référence : [ZQ95, p.331]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,1)
Mots clefs : intégrales dépendant d'un paramètre, comportement asymptotique, formulede Stirling.

235	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	**
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	**
217	Applications des formules de Taylor.	*

1.23 Polynôme de meilleure approximation uniforme

Référence : [Dem96, p.39]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,1)
Mots clefs : approximation de fonctions, polynômes, dimension finie, optimisation.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	**
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**
218	Problèmes d'extremums.	*

1.24 Explication de la méthode de Galerkin

Référence : [Kre99, p.240]
Utilisation : (***,0) (**,6) (*,0)
Mots clefs : méthodes hilbertiennes, dimension finie, projection, moindres carrés.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	**
211	Méthodes hilbertiennes.	**
212	Bases hilbertiennes. Exemples et applications.	**
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**

1.25 Densité des fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact

Référence : [?]
Utilisation : (***,1) (**,4) (*,0)
Mots clefs : transformée de Fourier, densité, convolution, fonctions à support compact.

238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	***
201	Exemples de parties denses et applications.	**
232	Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$	**
233	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.	**
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	**

1.26 Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Référence : [Cia90, p.95]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : itérations, comportement asymptotique, point fixe.

205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	**
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	**
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**

1.27 Formule sommatoire de poisson et prolongement de la fonction ζ

Référence : [ZQ95, p.93]
Utilisation : (***,0) (**,10) (*,3)

Mots clefs : série de Fourier, transformée de Fourier, prolongement de fonction, fonctions holomorphes, intégrales dépendant d'un paramètre, fonction *zeta*.

206	Prolongement de fonctions. Applications.	**
228	Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.	**
229	Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries.	**
233	Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.	**
237	Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	**
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	**
240	Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.	**
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	**
245	Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.	**
246	Exemples de problèmes d'interversion de limites.	**
231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.	*
235	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	*
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	*

1.28 Etude des méthodes de gradient

Référence : [Cia90, p.182]
Utilisation : (***,0) (**,4) (*,0)
Mots clefs : optimisation, résolution d'équations, itérations.

205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	**
218	Problèmes d'extremums.	**
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	**
230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**

1.29 Fonctions à variation bornées

Référence : [Gou94b, p.112][Pom84]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : fonctions monotone, continuité.

226	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.	**
227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	**

1.30 Approximation par des fonctions spline

Référence : [?]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,4)
Mots clefs : polynômes, optimisation, interpolation.

247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**
200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	*
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	*
215	Étude locale de courbes et de surfaces.	*
218	Problèmes d'extremums.	*

1.31 Forme quadratique de Lyapunov

Référence : [Arn74, p.199][GT96a]

Utilisation : (***,0) (**,0) (*,2)
Mots clefs : forme quadratique, équations différentielles.

219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	*
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	*

1.32 Lemme de Morse

Référence : [Gou94b, p.230]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : forme quadratique, calcul différentiel.

213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	**
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	**
217	Applications des formules de Taylor.	**

1.33 Théorème de Muntz

Référence : [Gou94b, p.286][Rud87, p.361]
Utilisation : (***,0) (**,5) (*,0)
Mots clefs : matrices, déterminant, projection, espaces denses.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**
201	Exemples de parties denses et applications.	**
208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	**
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	**
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**

1.34 Théorème de Tieze-Urisohn

Référence : [Gou94b, p.230]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : prolongement de fonctions.

206	Prolongement de fonctions. Applications.	**

1.35 Etude de la log-convexité

Référence : [Gou94b, p.100][Bou58, p.VII]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,1)
Mots clefs : convexité, fonction Γ.

227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	**
218	Problèmes d'extremums.	*

1.36 e n'est pas algébrique de degré 2

Référence : [Gou94b, p.103]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,3)
Mots clefs : développement de Taylor, rapidité de convergence, approximation des réels.

222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	**
217	Applications des formules de Taylor.	*
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	*
225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	*

1.37 Lemme de Milnor, théorème de la boule chevelue et de Brouwer

Référence : [GT96a, p.61][CL93]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : calcul différentiel, point fixe, champ de vecteurs.

205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	**
213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	**
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	**

1.38 Transformation de Legendre, fonction convexe conjuguées

Référence : [Bre83, p.8]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,1)
Mots clefs : fonction convexe, dualité, équations du mouvement.

227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	**
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	*

1.39 Théorème remarquable de Gauss

Référence : [Aud98]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,1)
Mots clefs : calcul différentiel, surfaces, courbures.

215	Étude locale de courbes et de surfaces.	**
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	*

1.40 Analyse variationnelle : équation de Laplace, avec exemple des équation du mouvement et de la chaînette

Référence : [Arn76, p.60][Dem96, p.174]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : calcul différentiel, calcul des variations.

218	Problèmes d'extremums.	**
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	**

1.41 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Référence : [Mal00, p.42]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : transformée de Fourier, traitement du signal, discrétisation.

211	Méthodes hilbertiennes.	**
212	Bases hilbertiennes. Exemples et applications.	**
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	**

1.42 Topologie faible et application à l'optimisation

Référence : [GT96b, p.149]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : optimisation, topologie faible, compacité.

208	Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	**
211	Méthodes hilbertiennes.	**

1.43 Théorème de Radon-nikodym

Référence : [Rud87, p.153]
Utilisation : (***,0) (**,4) (*,0)
Mots clefs : espace L^p, mesure complexe, méthodes hilbertienne, théorie de la mesure.

204	Espaces complets. Exemples et applications.	**
211	Méthodes hilbertiennes.	**
231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.	**
232	Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$	**

1.44 Théorème d'Ascoli, version L^p

Référence : [Bre83, p.72]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : espaces L^p, compacité, uniforme continuité.

202	Utilisation de la notion de compacité.	**
207	Utilisation de la continuité uniforme en analyse.	**
232	Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$	**

1.45 Théorème de Dupin

Référence : [Kli78, p.72]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : courbes de $\mathbb{R}^3$, quadriques.

215	Étude locale de courbes et de surfaces.	**

1.46 Equation de Hill-Mathieu

Ce sont les équations du type : $y'' + qy = 0$.
Référence : [ZQ95, p.401]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : équations différentielles, stabilité.

219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	**
220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	**
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	**

1.47 Equivalence des flots d'équations différentielles linéaires autonomes

Référence : [Arn74, p.192]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : équation différentielle, flots de transformations.

219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	**
220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	**

1.48 Problème de Sturm-Liouville

Ce sont les équations du type : $-(py')' + qy = 0$, $u \in [0,1]$.
Référence : [Bre83, p.138]
Utilisation : (***,0) (**,4) (*,0)
Mots clefs : équation différentielle, espaces de Sobolev.

211	Méthodes hilbertiennes.	**
219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	**
220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	**
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	**

1.49 Dual de $L^p = L^{p'}$

Référence : [Rud87, p.158][Bre83, p.54]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : Espaces L^p, dualité.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**
209	Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.	**
232	Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$	**

1.50 Sous groupes compacts de GL(E)

Référence : [Ale99, p.141]
Utilisation : (***,2) (**,0) (*,0)
Mots clefs : compacité, point fixe, convexité.

202	Utilisation de la notion de compacité.	***
205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	***

1.51 Sous groupes compacts de $GL(E)$, utilisation des ellipsoïdes de volume minimal

Référence : [Ale99, p.141]
Utilisation : (***,1) (**,2) (*,0)
Mots clefs : compacité, point fixe, convexité, extremum.

227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	***
202	Utilisation de la notion de compacité.	**
218	Problèmes d'extremums.	**

1.52 Applications conformes de la droite projective complexe

Référence : [Car61, p.182]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : homographie, angles, droite projective, fonctions holomorphes.

243	Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	**
244	Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.	**

1.53 Fonctions matricielles

Référence : [Gan66, p.96]
Utilisation : (***,0) (**,0) (*,1)
Mots clefs : interpolation, polynômes Lagrange.

247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	*

1.54 Etude topologique de $SO(3)$ via les quaternions

Référence : [MT97, p.125]
Utilisation : (***,3) (**,0) (*,0)
Mots clefs : inversion locale, quaternions, exponentielle.

203	Connexité : exemples et applications	***
213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	***
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	***

1.55 Programmation convexe

Référence : [Cia90, p.207]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : convexité, fonctions convexes, calcul différentiel.

218	Problèmes d'extremums.	**
227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	**

1.56 Existence de solution en programmation linéaire

Référence : [Cia90, p.230]
Utilisation : (***,1) (**,1) (*,0)
Mots clefs : polyhèdre, rang de matrices, points extrémaux, convexité.

218	Problèmes d'extremums.	***
227	Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	**

1.57 Algorithmes gloutons sur un matroïde pondéré

Référence : [CLR92, p.338]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : extémas, optimisation.

218	Problèmes d'extremums.	**

1.58 Programmation linéaire et plus court chemin

Référence : [CLR92, p.528]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : programmation linéaire, parcours de graphes.

203	Connexité : exemples et applications	**

1.59 Groupes à paramètres d'automorphismes

Référence : [Car97, p.142][MT97, p.63]
Utilisation : (***,1) (**,2) (*,0)
Mots clefs : goupes linéaire, calcul différentiel, convolution, équations différentielles.

220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	***
219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	**
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	**

1.60 Théorème du point fixe sur un treilli complet

Référence : [Dub53, p.38]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,1)
Mots clefs : treillis, point fixe, suite récurrente.

224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	**
205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	*

1.61 Transformée de Fourier sur un groupe fini

Référence : [Ser70, p.103][DMK72, p.203][War71, p.74][CLR92, p.764][Dem97, p.93]
Utilisation : (***,1) (**,0) (*,1)
Mots clefs : groupe fini, dualité, racines de l'unité, caractères, produit hermitien, transformée de Fourier, algorithmes, polynômes, racines de l'unité, algorithme FFT.

238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	***
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	*

1.62 Transformée de Fourier discrète

Référence : [Dem97, p.93][Mal00, p.41]
Utilisation : (***,3) (**,0) (*,0)
Mots clefs : groupe fini, groupe cyclique, transformée de Fourier, algorithme FFT, équations aux dérivées partielles, équation de Poisson, calcul des coefficients de Fourier.

210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	***
216	Utilisation de la transformation de Fourier et des séries de Fourier pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.	***
238	Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.	***

1.63 Bases de Gröbner

Voici les principales choses à dire sur ce sujet :

- Ordre sur les monômes d'un polynômes, le monôme de tête noté LT(f). Algorithme de division, problème : on n'obtient pas toujours de reste nuls pour les polynômes de l'idéal !
- Définition des bases de Gröbner : $\{g_1, \ldots ,g_n\}$ est une base de Gröbner de l'idéal I *ssi* $\{LT(g_1), \ldots ,LT(g_n)\}$ engendre $LT(I)$. Quand on divise par une base de Gröbner, le reste est nul ssi le polynôme fait parti de l'idéal. De plus on a unicité du reste.
- Présentation de l'algorithme de *Buchberger*, via l'introduction du polynôme-S :

$$(f_1,f_2) = \frac{x^\gamma}{LT(f_1)} f1 - \frac{x^\gamma}{LT(f_2)} f2$$

  où x^γ est le plus petit monôme divisible par $LT(f_1)$ et $LT(f_2)$. Base de Gröbner réduite.
- Utilisation des bases de Gröbner pour l'élimination. Si on prend $I \subset k[x_1, \ldots ,x_n]$ un idéal dont $G == \{f_1, \ldots ,f_t\}$ est une base de Gröbner pour l'ordre lexical $x_n \prec \ldots \prec x_n$, alors pour $k = 2 \ldots n$, l'ensemble $G \cap k[x_k, \ldots ,x_n]$ est une base de Gröbner de l'idéal d'élimination $I \cap k[x_k, \ldots ,x_n]$. Le problème est de savoir si on peut "remonter", i.e. si une solution du système $I \cap k[x_n]$ peut se relever en une solution du système $I \cap k[x_{n-1},x_n]$, etc. La réponse est positive sur $k = \mathbb{C}$ (théorème d'extension).
- Applications des bases de Gröbner. Par exemple, on peut montrer que la variété affine $V(I) \subset \mathbb{C}^n$ est vide *ssi* $I = \mathbb{C}[x_1, \ldots ,x_n]$ *ssi* $\{1\}$ est une base de Gröbner réduite de I. Ceci permet de décider si un graphe peut être colorié avec 3 couleurs, en ajoutant l'équation $x_i^3 - 1 = 0$ pour chaque sommet i (les couleurs sont les racines cubiques de 1), et pour chaque arrête (i,j) l'équation $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$. On peut aussi citer l'utilisation de bases de Gröbner pour résoudre les équations polynomiales résultant de la cinématique inverse pour les robots articulés.

Référence : [CLO96, p.48][CS97, p.1]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : idéal, polynômes, algorithme.

230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**

1.64 Méthodes de Gauss et polynômes orthogonaux

Définition 1.5. ESPACE FONCTIONNEL Soit $w :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que $\forall n, \int_\alpha^\beta |x|^n w(x)dx < \infty$. On considère l'espace vectoriel E des fonctions de module carré intégrable pour le poids $w(x)$, muni du produit scalaire :

$$\langle f,g \rangle = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)w(x)dx$$

Théorème 1.16. POLYNÔMES ORTHOGONAUX *Il existe une unique suite $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle .,. \rangle$. De plus, ces polynômes sont donnés par la relation de récurrence :*

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x) \quad \textit{avec :}$$
$$\lambda_n = \frac{\langle xp_{n-1},p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|^2} \quad \textit{et :}$$
$$\mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}$$

Enfin, p_n a n racines simples distinctes dans $]a,b[$.

Théorème 1.17. Méthode de Gauss *On cherche une formule approchée de la forme :*

$$\int_\alpha^\beta f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j) \text{ pour } x_j \in [\alpha,\beta]$$

Il existe un choix et un seul des points x_j et des poids λ_j de sorte que la méthode soit d'ordre $N = 2l+1$. Les points x_j sont alors les racines du $(l+1)$-ième polynôme orthogonal pour le poids w sur $]\alpha,\beta[$.

Remarque. Les méthodes sont très puissantes à la fois parce qu'elles ont un ordre élevé, mais aussi parcequ'elle intègrent directement un poids w qui peut par exemple présenter des singularités sur le bord de l'intervalle. La seule restriction est de devoir calculer au préalable les racines des polynômes orthogonaux correspondants.

Remarque. Explication de la démarche Pour comprendre pourquoi est-ce que l'on est amené à choisir les zéros des polynômes orthogonaux comme points d'interpolation, il faut étudier de plus près la formule d'erreur correspondant à la méthode issue du choix de $N+1$ points d'interpolation : Si on note P_N le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 < \ldots < x_N$, alors, on peut utiliser les différences divisées définies de la manière suivante :

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{8}$$

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{9}$$

on a alors une expression du polynôme d'interpolation de *Lagrange* :

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f[x_0,\ldots,x_k]\pi_k(x) \quad \text{avec :} \tag{10}$$

$$\pi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k) \tag{11}$$

et surtout un résultat fondamental :

$$f(x) - P_N(x) = f[x_0,\ldots,x_N,x]\pi_N(x) \tag{12}$$

En effet, avec le théorème de *Rolle*, ceci permet d'affirmer que :

$$\exists \xi_x \in]\alpha,\beta[,\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}\pi_N(x), \quad \text{d'où} \tag{13}$$

$$E(f) = \int_\alpha^\beta (f(x) - P_N(x))dx = \frac{1}{(N+1)!}\int_\alpha^\beta f^{(N+1)}(\xi_x)\pi_N(x)dx \tag{14}$$

Tout ces calculs permettent, entre autre, de démontrer les vitesses de convergence pour les méthodes de *Newton-Cotes*. Cependant, ils permettent aussi et surtout d'élaborer des méthodes plus performantes par la remarque suivante : si le polynôme π_N est tel que $\int_\alpha^\beta \pi_N(t)dt = 0$, alors, si on introduit un nouveau point de subdivision x_{N+1}, on peut exploiter la formule des différences divisées :

$$f[x_0,\ldots,x_N,x] = f[x_0,\ldots,x_N,x_{N+1}] + (x - x_{N+1})f[x_0,\ldots,x_N,x_{N+1},x] \tag{15}$$

ce qui permet d'augmenter l'ordre de la méthode, grace à la formule :

$$E(f) = \int_\alpha^\beta f[x_0,\ldots,x_N,x]\pi_N(x)dx \tag{16}$$

$$= \int_\alpha^\beta f[x_0,\ldots,x_N,x_{N+1},x]\pi_{N+1}(x)dx \tag{17}$$

Maintenant, il suffit de remarquer que si l'on a pu choisir le point x_{N+1} tel que $\int_\alpha^\beta \pi_{N+1}(t)dt = 0$, alors on peut recommencer ! Et jusqu'ou peut on aller ? Et bien le choix optimal est celui tel que le polynôme π_N qui correspond aux choix des $N+1$ premiers points (ceux qui détermine la méthode) soit orthogonaux aux polynômes "ajoutés", ie les $\prod_{i=N+1}^{N+k}(x - x_i)$. Ceci signifie donc que notre polynôme π_N doit être orthogonaux aux plus possible d'espaces E_{N+k} des polynômes de degré inférieur à $n+k$. Donc le choix optimal est celui des polynômes orthogonaux de *Legendre*, qui sont orthogonaux à tous les polynômes de degré inférieur à N. Bien sûr ce raisonnement marche aussi avec des intégrales comportant un poids w, ce qui conduit aux polynômes orthogonaux pour le poids utilisé.

Référence : [Dem96, p.50 et 73]

Utilisation : (***,0) (**,7) (*,0)

Mots clefs : polynômes, intégration numérique, vitesse de convergence.

210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	**
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**
231	Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.	**
234	Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.	**
235	Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	**
236	Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.	**
247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	**

1.65 Base d'Auerbach

Référence : [ZQ95, p.160]

Utilisation : (***,0) (**,2) (*,1)

Mots clefs : déterminant, orthogonalité.

202	Utilisation de la notion de compacité.	**
210	Utilisation de la dimension finie en analyse.	**
218	Problèmes d'extremums.	*

1.66 Champs de forces conservatifs, exemple du double pendule

Référence : [Arn76, p.??]

Utilisation : (***,0) (**,4) (*,0)

Mots clefs : équations différentielles, formes quadratiques.

217	Applications des formules de Taylor.	**
219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	**
220	Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	**
221	Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	**

1.67 Etude du mouvement des planètes

Référence : [Arn76, p.39]

Utilisation : (***,0) (**,1) (*,1)

Mots clefs : équations différentielles, coniques, groupe des périgés.

215	Étude locale de courbes et de surfaces.	**
219	Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.	*

1.68 Résultant et application à l'élimination

Soient $f(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$et $g(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$deux polynômes sur un corps $\mathbb{K}$. Lorsque $f$et $g$possèdent un facteur non trivial, ie. $f = f_1 h$et $g = g_1 h$, l'équation :

$$uf + vg = 0 \quad \text{avec } \deg(u) \leq \deg(g) - 1 \text{ et } \deg(v) \leq \deg(f) - 1 \tag{18}$$

possède les solutions $u = g_1$et $v = -f_1$. Réciproquement, l'existence de solution nulle implique l'existence d'un facteur commun non trivial. En projetant l'équation (18) sur la base canonique de $\mathbb{K}_m[X] \times \mathbb{K}_n[X]$, l'existence de solution non nulle est équivalente à la nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix}
a_m & & & & b_n & & & \\
a_{m-1} & a_m & & & b_{n-1} & b_n & & \\
 & a_{m-1} & \ddots & & & b_{n-1} & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & a_m & \vdots & & \ddots & b_n \\
a_0 & \vdots & & a_{m-1} & b_0 & \vdots & & b_{n-1} \\
 & a_0 & & & & b_0 & & \\
 & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
 & & & a_0 & & & & b_0
\end{vmatrix} \tag{19}$$

Définition 1.6. Le déterminant (19) se nomme le résultant de $f$et $g$et se note $Res_X(f,g)$.

Théorème 1.18. PROPRIÉTÉS DU RÉSULTANT

(i) $Res_X(f,g) = (-1)^{mn} Res_X(g,f)$

(ii) $Res_X(f,b_0) = b_0^m$, *pour* $b_0 \in \mathbb{K}$.

(iii) *Si* $\deg(f) = m \leq n = \deg(g)$, *et si* h*est le reste de la division de* g*par* f, *on a* $Res_X(f,g) = a_m^{n-m} Res_X(f,h)$.

(iv) $Res_X(f,g) = 0$*si et seulement si* f*et* g*ont un facteur non trivial.*

(v) *Si* f *et* g *s'écrivent :*

$$f = a_0(X - \alpha_1)(\ldots)(X - \alpha_m) \tag{20}$$

$$g = b_0(X - \beta_1)(\ldots)(X - \beta_n) \tag{21}$$

alors on a :

$$Res_X(f,g) = a_m^n \prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_n^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j) = a_m^n b_n^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (\alpha_i - \beta_j)$$

Remarque. Si on se place dans la clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$, alors l'écriture (20) est toujours réalisée et on peut appliquer (v).

Proposition 1.19. GÉNÉRALISATION *Le résultant est un polynôme entier en les coefficient de* f *et* g, *i.e.* $Res_X(f,g) \in \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m]$. *Ceci permet de le calculer dans un anneau* A *quelconque.*
Si l'anneau A *est intègre et factoriel, en utilisant le théorème précédent dans le corps de fraction* $Frac(A)$, *on garde la propriété que* f *et* g *on un facteur commun non trivial si et seulement si* $Res_X(f,g) = 0$, *ce qui est équivalent à une racine commune dans une extension algébriquement close de* A.

Remarque. La proposition 1.19 nous permet de traiter le cas des polynômes en plusieurs variables, i.e. si $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, on utilise $f \in A[X_n]$ avec $A = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ qui est intègre et factoriel.

On souhaite éliminer la variable X_r entre deux polynômes $f,g \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_r]$, notés de la façon suivante :

$$f = \sum_{i=0}^{m} f_i X_r^i \qquad f_i \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_{r-1}] \qquad f_m \neq 0 \tag{22}$$

$$g = \sum_{i=0}^{n} g_i X_r^i \qquad g_i \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_{r-1}] \qquad g_n \neq 0 \tag{23}$$

Définition 1.7. Idéal d'élimination Pour $f \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_r]$, on note $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ le polynôme évalué en $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \overline{\mathbb{K}}^r$. On pose $h = Res_{X_r}(f,g) \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_{r-1}]$. Soit $I = \langle f,g\rangle$. On note $I_r = I \cap \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_{r-1}]$. C'est l'idéal d'élimination. En quelque sorte, l'idéal I_r contient toutes les façons d'éliminer la variable X_r des équations $\{f = 0, g = 0\}$.

Proposition 1.20. Elimination *On a $h \in I_r$. Donc si $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \overline{\mathbb{K}}^r$ est un zéro commun de f et g, alors $h(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) = 0$. Au final, le calcul de h conduit à une équation en $r-1$ variables.*

Théorème 1.21. Extension *On suppose connu $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) \in \overline{\mathbb{K}}^{r-1}$ tels que $h(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) = 0$. Alors, si on n'est pas dans l'un des cas suivants :*

- $\forall i \in \{0,\ldots,m\}$, $f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) = 0$
- $\forall i \in \{0,\ldots,n\}$, $g_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) = 0$
- $f_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) = g_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}) = 0$

il existe $\alpha_r \in \overline{\mathbb{K}}$ tel que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ soit un zéro commun à f et g.

Référence : [CLO96, p.147][CS97, p.25][Mig89, p.162]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : déterminant, polynômes, système d'équations.

230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**

1.69 Séries génératrices, nombres de relations d'équivalences

Référence : [FGS90, p.518]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,1)
Mots clefs : combinatoire, séries entières.

225	Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.	**
241	Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.	**
242	Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.	**
239	Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.	*

1.70 Idéaux fermés de $C(E)$

Référence : [Gob95, p.77]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)
Mots clefs : idéaux, topologie.

200	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	**
202	Utilisation de la notion de compacité.	**
226	Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.	**

1.71 Etude topologique d'ensembles de matrices de rang fixé

Référence : [Leb96]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : rang, calcul différentiel.

213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	**
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	**

1.72 Théorème de Cartan Von-Neumann

Référence : [MT97, p.64]
Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)
Mots clefs : racines de polynômes, coniques.

213	Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	**
214	Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	**

1.73 Suites de Sturm

Référence : [Cia90, p.121][Gan66, p.10]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : racines de polynômes, localisation.

230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	**

1.74 Critère de Routh

Théorème 1.22. CRITÈRE DE ROUTH *Soit $f(z) = p_n z^n + \ldots + p_1 z + p_0$ un polynôme à coefficient réels avec $p_0 > 0$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ on considère les déterminants de taille i :*

$$D_i(f) = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2i-1} & p_{2i-2} & p_{2i-3} & p_{2i-4} & \vdots & p_i \end{bmatrix}$$

*où l'on a posé $p_i = 0$ si $i > n$. Alors toutes les racines de f sont de partie réelle strictement négatives **si et seulement si** $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $D_i(f) > 0$.*

Référence : [Mig89, p.223][Gan66, p.167]
Utilisation : (***,0) (**,0) (*,1)
Mots clefs : polynômes, racines de polynômes, localisation, équations différentielles.

230	Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.	*

1.75 Etude des suites homographiques

Référence : [Vid01, p.59]
Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)

Mots clefs : homographies, itérations.

222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	**
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	**

1.76 Sous groupes algèbriques de $GL(E)$, mesure de Haar et point fixe de Kakutani

Référence : [Ale99]

Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)

Mots clefs : point fixe, groupe linéaire.

202	Utilisation de la notion de compacité.	**
205	Utilisation de théorèmes de point fixe.	**

1.77 Fractions continues

Voici les principales choses à dire sur ce sujet :

- Qualité d'approximation d'un réel ξpar des rationnels : il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$tels que $|\xi - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$. comme utilisation des ce résultat, on peut citer le critère pour qu'un nombre impair soit somme de deux carrés : il suffit qu'il soit congru à 1 modulo 4.
- Qualité d'approximation de nombre algébrique : soit ξun nombre irrationnel algébrique de degrés $n$sur $\mathbb{Z}$. Alors pour tout εstrictement positif, l'inégalité $|\xi - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$n'admet qu'un nombre fini de solutions $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Ceci permet de construire les nombres de Liouville : $\sum_{k \geq 1} a^{k!}$, qui sont transcendants pour tout entier a.
- On défini ensuite la notion de fraction réduite d'un nombre réel ξ, qui se dit d'une fraction réalisant, pour tous les dénominateurs plus petits, la meilleure approximation. On donne les formules de récurrence pour déterminer les réduites, ce qui abouti aux fractions continues.
- Comme application, on peut citer la résolution de l'équation de Pell : $x^2 - dy^2 = k$. On utilise le résultat suivant : l'équation $x^2 + dy^2 = \pm 1$admet en plus de la solution $(\pm 1,0)$une infinité de solutions $(\pm x_n, \pm y_n)$avec $x_n \geq > 0, y_n \geq 0$. On note (x_1,y_1)la solution telle que $x+y\sqrt{d}$soit minimal. On a alors $x_n+y_n\sqrt{d} = (x_1+y_1\sqrt{d})^n$. De plus, le développement en fraction continue de $\sqrt{d}$est périodique de période s, et le dernier quotient de cette période est (x_1,y_1). Enfin, on a $x_n^2 + dy_n^2 = (-1)^{ns}$

Référence : [Gou94a, p.87][Dem97, p.180][Des86, p.9]

Utilisation : (***,0) (**,3) (*,0)

Mots clefs : approximation des réels, algorithme d'Euclide, équations diophantiennes.

222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	**
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**
224	Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.	**

1.78 Nombres transcendants de Liouville

Référence : [Gou94a, p.87]

Utilisation : (***,0) (**,2) (*,0)

Mots clefs : approximation des réels, nombres transcendant.

222	Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.	**
223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**

1.79 Suite de Fibonacci et division euclidienne

Référence : [Dem97, p.25]
Utilisation : (***,0) (**,1) (*,0)
Mots clefs : suites récurrentes, complexité.

223	Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	**

1.80 Polynômes orthogonaux

Référence : [Dem96, p.51]
Utilisation : (***,1) (**,0) (*,0)
Mots clefs : polynômes orthogonaux, espace L^2, polynôme de meilleure approximation.

247	Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.	***

1.81 Théorème de l'angle pivotant

Référence : [LB88, p.69]
Utilisation : (***,1) (**,0) (*,0)
Mots clefs : coniques, angles, règle et compas.

215	Étude locale de courbes et de surfaces.	***

2 Liste des leçons

2.201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

1 - Espaces métriques et de Banach:

. Autour des espaces de Banach [*Citer les théorèmes de BS*]

. Fonctions holomorphes et méromorphes [*Parler des fonctions elliptiques et de compacité*]

. Opérateurs et hypercyclicité [*Appliquer le critère à la dérivation de fonctions entières*]

. Autour du Théorème des zéros [*Etudier les idéaux de fonctions continues*]

2 - Espaces de Hilbert:

. Premières propriétés [*Projection, dualité et séparabilité*]

. Théorie L^2 des séries de Fourier, applications [*densité des polynômes trigonométriques, résolution de l'équation de la chaleur*]

. Méthodes Hilbertiennes [*Parler de méthode de gradient avec projection, th.Lax-Milgram*]

3 - Utilisation de la dimension finie:

. Interpolation polynomiale, meilleure approximation

. Equations intégrales : méthodes de projection

. Equations aux dérivées partielles : différences finies et utilisation de la FFT

13	Hypercyclicité, critère de Kitaï [*insister sur l'espace des fonction holomorphes*]	***
1	Méthodes de projection pour les équations intégrales	***

2.202 Exemples de parties denses et applications.

1 - Généralités, premières applications:

. Définitions

. Prolongement des applications uniformément continues.[Pom84] [*application à l'intégrale de Riemann, convolution* $L^1 * L^2$*, transformée de Fourier*]

. Etude dans $\mathbb{R}$ [*sous-groupes additifs, approximation par des rationnels*]

. Un critère plus fort : l'équirépartition

2 - Approximation et dimension finie:

. Théorème de Weierstrass et de Stone Weierstrass [*image dense de la transformée de Fourier, transformée de Fourier à support compact*]

. Approximation polynômiale, polynôme de meilleure approximation

. Densité de fonctions à transformée de Fourier bornée [*Utilise le théorème de Weierstrass*]

. Application : théorème taubériens [*à la fois celui d'Ikéara et le théorème taubérien fort*]

3 - Densité dans les espaces fonctionnels:

. Séparabilité[Bre83, p.47], cas des hilbert

. Espaces L^p[Bre83, p.55] [*fonctions à support compact, séparabilité, convolution et régularisation*]

. Théorème de Baire, premières applications

. Opérateurs et hypercyclicité

13	Hypercyclicité, critère de Kitaï	***
10	Suites équiréparties modulo 1	***

2.203 Utilisation de la notion de compacité.

1 - Généralités:

. Compacité, pré-compacité[ZQ95, p.133]

. Théorèmes d'Ascoli[ZQ95, p.148] [*parler d'Ascoli Lp*]

. Compacité et fonctions holomorphes [*Théorème des familles normales comme utilisation d'Ascoli*]

. Fonction sur un compact de $\mathbb{R}$[Pom84, p.55] [*Parler des idéaux fermés de C(E), théorème de Heine, homéomorphismes*]

. Compacité et optimisation [*Donner l'exemple des bases de Auerbach*]

2 - Compacité et opérateurs:

. Opérateurs compacts[Bre83, p.88]

. Equations intégrales

. Méthode de Nyström

. Convergence des méthodes de projection

3 - Compacité et groupes linéaire:

. Mesure de Haar [*Parler du théorème de Muntz*]

. Etude des sous-groupes compacts

. Sous-groupes algébriques

2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***
50	Sous groupes compacts de GL(E)	***
8	Théorème des familles normales et théorème de Cartan	***

2.204 Connexité : exemples et applications

1 - Généralités:

. Connexité, connexité par arcs[Pom84, p.71] [*relations d'équivalence ouvertes, composantes connexes, exemple de* $GL_n(\mathbb{R})$]

. Connexité et fonctions[Pom84, p.74] [*théorème des valeurs intermédiaires*]

. Groupes classiques[MT97]

2 - Passage du local au global:

. Critères de difféomorphie [*théorème de Hadamard*]

. Utilisation de l'inversion locale [*Exemple de SO(3)*]

3 - Holomorphie:

. Primitives holomorphes

. Simple connexité et représentation conforme

. Fluides incompressibles et représentation conforme

7	Théorème de Hadamard : une CNS de difféomorphie	***
54	Etude topologique de $SO(3)$ via les quaternions [*insister sur l'utilisation de la convexité pour montrer la surjectivité*]	***

2.205 Espaces complets. Exemples et applications.

1 - Généralités:

. Définitions, exemples[Pom84, p.44] [*complété, sous espaces fermés, produit de complets*]

. Prolongement des applications

. Point fixe contractant[Pom84, p.49]

2 - Théorème de Baire et applications:

. Théorème de Banach Steinhaus[Bre83, p.15] [*passage du ponctuel à la convergence en norme*]

. Théorème du graphe fermé et de l'application ouverte

.

. Hypercylcicité des opérateurs

3 - Exemple des espaces L^p:

. Généralités [*séparabilité, dual*]

. Généralité sur les espaces de Hilbert [*projection, dualité*]

. Utilisation des espaces de hilbert L^2 [*séries de Fourier et Radon-Nikodym*]

13	Hypercyclicité, critère de Kitaï [*insister sur l'utilisation du théorème de Baire*]	***
1	Méthodes de projection pour les équations intégrales [*insister sur l'utilisation du théorème de Banach-Steinaus*]	***

2.206 Utilisation de théorèmes de point fixe.

1 - Théorèmes de point fixes classiques:

. Point fixe contractant[Pom84, p.75] [*donner des exemples en dimension 1*]

. Autour du théorème de Brouwer [*Lemme de Milnor, boule chevelue*]

. Fonctions holomorphes et théorème de Cartan

2 - Etude de groupe linéaire:

. Sous-groupes compacts, approche géométrique

. Mesure de Haar, applications

3 - Application à l'analyse numérique:

. Points fixes attractifs[Dem96, p.93]

. Méthode de Newton

. Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

. Optimisation sous contrainte, théorème de Stampachia

50	Sous groupes compacts de GL(E)	***
8	Théorème des familles normales et théorème de Cartan [*admettre le théorème des familles normales*]	***
6	Méthode de Newton	***

2.207 Prolongement de fonctions. Applications.

1 - Approche théorique:

. Prolongement des applications uniformément continues[Pom84, p.48]

. Théorème de Hahn-Banach [*pas besoin d'espaces complets*]

2 - Prolongement analytique:

. Fonctions holomorphes, prolongement des identités

. Exemples de prolongements [*fonction zeta, gamma*]

. Points réguliers et singuliers, théorème de Hadamard[ZQ95, p.49][Rud87, p.369]

3 - Théorème tauberien:

. Le théorème tauberien fort

. Le théorème tauberien d'Ikehara

3	Théorème des lacunes de Hadamard	***
12	Théorème Tauberien fort	***

2.208 Utilisation de la continuité uniforme en analyse.

1 - Généralité:

. Définitions[Pom84, p.58] [*exemples, fonctions lipchitziennes*]

. Utilisation de la compacité, exemple[Pom84, p.154] [*théorème de Heine*]

2 - Prolongement de fonctions:

. Prolongement des applications uniformément continues

. Cas des fonctions linéaires continues. Théorème de Hahn-Banach.

3 - Approximation des fonctions continues:

. Module de continuité[Dem96, p.42][Pom84, p.63]

. Approximation polynomiale[Dem96, p.42](polynômes de Bernstein[Pom84, p.177])

. Convolution et identités approchées (CU si f uniformément continue[Pom84, p.182])

4 - Théorème d'Ascoli et applications:

. Enoncé

. Familles normales

. Méthode de Nyström pour les équations intégrales

8	Théorème des familles normales et théorème de Cartan [*insiter sur l'utilisation du théorème d'Ascoli*]	***
2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***

2.209 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.

1 - Séparabilité, applications:

. Définitions, exemples[Bre83, p.47, 85] [*hilbert séparables, application aux séries de Fourier*]

. Opérateurs hypercycliques

. Application à la dérivation des fonctions holomorphes

2 - Equirépartition:

. Définition, critère de Weil

. Exemples et applications

3 - Théorie de la mesure et probabilité:

. Généralité

. Martingales et chaînes de Markov

4 - Utilisation de la dimension finie:

. Position du problème, exemple des équations intégrales

. Méthodes de projection

. Méthodes de Galerkin

13	Hypercyclicité, critère de Kitaï [*faire un paragraphe sur la séparabilité*]	***
10	Suites équiréparties modulo 1	***

2.210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés : exemples et applications.

1 - Généralités:

. Définitions [*normes subordonnées, équivalence*]

. Prolongement des applications linéaires continues,[Pom84, p.66]

. Théorème du graphe fermé, de l'application ouverte

2 - Dualité:

. Théorème de Hahn-Banach[Bre83, p.1],[Pom84, p.66] [*prolongement*]

. Quelques exemples, dual de L^p

. Fonctions convexes conjuguées

3 - Opérateurs compacts, exemples des équations intégrales:

. Définitions, premiers exemples

. Théorie de Riesz-Fredholm

. Méthode de Nyström

. Méthodes de projection

1	Méthodes de projection pour les équations intégrales	***
13	Hypercyclicité, critère de Kitaï	***

2.211 Utilisation de la dimension finie en analyse.

1 - La dimension finie pour elle même:

. Norme et continuité[ZQ95, p.232] [*compacts, équivalence des normes, th. de Riesz, norme subordonnée, continuité automatique*]

. Projections[ZQ95, p.160] [*bases d'Auerbach, majoration de la norme d'un projecteur*]

2 - Approximation polynomiale:

. Polynôme de meilleure approximation[Dem96, p.39] [*théorème d'existence, exemple de la norme uniforme*]

. Interpolation de Lagrange[Dem96, p.21]

. Formules de quadrature[Dem96, p.59] [*méthodes de Newton Cotes, polynômes orthogonaux, méthodes de Gauss*]

3 - Approximation des équations aux dérivées partielles:

. La transformée de Fourier discrète, algorithme FFT

. Méthodes des différences finies, utilisation de la FFT

4 - Approximation des équations linéaires intégrales:

. Présentation du problème [*opérateur à noyau, équation de Fredholm*]

. Méthode de quadrature de Nyström [*expliquer que ce sont les méthodes numériques, donner le système*]

. Méthodes de projection [*convergence pour les équations de Fredholm, méthode de Galerkin*]

1	Méthodes de projection pour les équations intégrales	***
2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***
62	Transformée de Fourier discrète [*résolution de l'équation de Poisson*]	***

2.212 Méthodes hilbertiennes.

1 - Hilberts séparables, bases hilbertiennes:

. Généralités[Bre83, p.79],[Rud87, p.99] [*représentation, dualité, base hilbertienne*]

. Espace L^2, applications [*théorème de Radon-Nikodym*]

2 - Séries de Fourier et transformée de Fourier:

. L'espace $L^2(0{,}2\pi)$, séries de Fourier[Rud87, p.190]

. Application à l'équation de la chaleur[DMK72, p.63] [*sur le cercle, chaleur de la terre*]

. Transformée de Fourier, applications (calcul formel des solutions d'une EDP)

3 - Théorème de Stampachia, applications aux EDP:

. Optimisation sous contraintes et théorème de Stampachia

. Espace de Sobolev H^1

. Exemple d'EDP [*Sturm-Liouville*]

4 - Méthodes de projections:

. Polynômes orthogonaux, applications[Pom84, p.245][Dem96, p.50]

. Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes

. Position du problème, exemple des équations intégrales

. Méthodes de projection, méthode de Galerkin

4	Résolution de l'équation de la chaleur [*faire un paragraphe sur la résolution d'EDP (Galerkin, etc)*]	***
17	Optimisation sous contraintes et théorème de Stampachia	***

2.213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1 - Hilberts séparables, bases hilbertiennes:

. Généralités[Bre83, p.79],[Rud87, p.99] [*représentation, dualité, base hilbertienne*]

. Polynômes orthogonaux, applications[Pom84, p.245][Dem96, p.50]

. Exemple de l'espace L^2

2 - Théorie L^2 des séries de Fourier:

. Polynômes trigonométriques, densité[Rud87, p.190]

. Application à l'équation de la chaleur[DMK72, p.63] [*sur le cercle, chaleur de la terre*]

. FFT, calcul approché des séries de Fourier

. Application de la FFT à la résolution de l'équation de Poisson

3 - Méthodes de projections:

. Position du problème, exemple des équations intégrales

. Méthodes de projection, méthode de Galerkin

4	Résolution de l'équation de la chaleur	***
20	Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes	***

2.214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

1 - Généralités:

. Enoncés des théorèmes[Pom84, p.284]

. Premières applications [*image ouverte, inversion globale*]

. Formules de changement de variables

2 - Difféomorphie : exemples et applications:

. Critères de difféomorphie [*théorème de Hadamard*]

. Lemme de Morse

. Théorème de la boule chevelue

3 - Etude dans le groupe linéaire:

. Etude de l'exponentielle[MT97]

. Théorème de cartan-Von Neumann

. Etude de $SO(3)$

7	Théorème de Hadamard : une CNS de difféomorphie	***
54	Etude topologique de $SO(3)$ via les quaternions	***

2.215 Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

1 - Généralités:

. Définitions [*différentiabilité, formule de composition*]

. Inégalité des accroissement finis[Pom84, p.284]

. Différentiabilité d'ordre supérieur

2 - Autour de l'inversion locale:

. Enoncé du théorème

. Applications [*inversion globale, changement de variables*]

. Difféomorphie [*lemme de Morse, CNS de Hadamard*]

3 - Etude dans le groupe linéaire:

. Etude de l'exponentielle[MT97]

. Théorème de cartan-Von Neumann

. Etude de $SO(3)$

7	Théorème de Hadamard : une CNS de difféomorphie	***
54	Etude topologique de $SO(3)$ via les quaternions	***

2.216 Étude locale de courbes et de surfaces.

1 - Courbes:

. Définitions, comportement local [*équation implicite, paramétrée*]

. Abscisse curviligne, reprère de Fresnet

. Exemples [*cycloïdes*]

. Les coniques [*propriétés optiques*]

2 - Surfaces:

. Définitions, courbure

. Formes fondamentales [*théorème remarquable de Gauss*]

. Exemples [*surfaces de révolution*]

3 - Courbes algébriques:

. Formules implicites [*utilisation du discriminant*]

. Points singuliers et paramétrisation rationnelle

. Courbes de Beziers, fonctions splines

4 - Applications:

. Mouvement des planètes et coniques

. Fluides incompressibles

. Enveloppes, caustiques

. Quadriques et théorème de Dupin

16	Représentation conforme et fluides incompressibles	***
81	Théorème de l'angle pivotant	***

2.217 Utilisation de la transformation de Fourier et des séries de Fourier pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

<u>1 - Utilisation de la transformée de Fourier:</u>

. Propriétés utilisées[ZQ95, p.68] [*quelques rappels sur la convergence des séries de Fourier*]

. Equation de la chaleur[DMK72, p.46] [*sur un cercle, sur un segment*]

. Principe du maximum, utilisation de l'énergie[ZQ95, p.103]

. Température de la terre

. Equation d'onde

<u>2 - Utilisation de la transformée de Fourier:</u>

. Propriétés utilisées[DMK72, p.106] [*transforme une équation différentielle en équation polynomiale*]

. Exemples simples d'EDO [*exemple explicité, équation de Circuit*]

. Equation de la chaleur

. Equation d'onde

<u>3 - Transformée de Fourier discrète:</u>

. Transformée de Fourier discrète, algorithme FFT

. Application au calcul des coefficients de Fourier

. Application à la résolution de l'équation de Poisson

4	Résolution de l'équation de la chaleur	***
62	Transformée de Fourier discrète [*résolution de l'équation de Poisson*]	***

2.218 Applications des formules de Taylor.

<u>1 - Généralités:</u>

. Les formules de Taylor en dimension un

. Premières applications [*théorème de Kolmogorov*]

. Généralisation en dimensions supérieures

<u>2 - Etude locale:</u>

. Courbes et surfaces [*le lemme de morse*]

. Développements limités

. Fonctions C^∞ et analytiques [*théorème de Borel, fonctions plates*]

<u>3 - Développement d'Euler-MacLaurin:</u>

. Formule d'Euler-MacLaurin, premières applications[Dem96, p.77]

. Application aux développement asymptotique [*fonction gamma, zeta*]

. Application à la méthode de Romberg d'intégration numérique

11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications [*insister sur la formule d'Euler-MacLaurin*]	***
21	Théorème de Kolmogorov	***

2.219 Problèmes d'extremums.

1 - Généralités:

. Utilisation de la compacité [*exemple des bases d'Auerbach*]

. Différentiabilité [*parler des extremas liés*]

. Prise en compte de la convexité

2 - Méthodes numériques de recherches d'extremum:

. Méthode de newton [*on cherche à résoudre* $f'(x) = 0$]

. Méthode de gradient, gradient conjugué, minimisation au sens des moindres carrés

. Gradient avec projection, théorème de Stampachia

. Problèmes variationnels, équation d'Euler-Lagrange[Dem96, p.174]

3 - Programmation convexe et linéaire, algorithmique:

. Relations de Kuhn et Tucker en programmation convexe

. Présentation des problèmes de programmation linéaire

. CNS d'existence de solution en programmation linéaire

. Recherche algorithmique, exemple des algorithmes gloutons

56	Existence de solution en programmation linéaire	***
6	Méthode de Newton	***
17	Optimisation sous contraintes et théorème de Stampachia [*insister sur le fait que c'est un problème d'optimisation, type gradient avec projection*]	***

2.220 Équations différentielles $y' = f(x,y)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

1 - Généralités:

. Critères d'existence des solutions[ZQ95, p.248] [*théorie locale*]

. Etude du flot des systèmes autonomes [*redressement du flot*]

. Exemples de groupes à paramètres

. Application : une CNS de difféomorphie [*insister sur l'utilisation des points attracteurs*]

2 - Etudes de cas particuliers:

. Systèmes différentiels linéaires[Dem96, p.181]

. Equations à variables séparées[Dem96, p.144]

. Utilisation d'intégrales premières[Dem96, p.148]

. Exemple du système de Voltera-Lotka

. Quelques situations géométriques [*famille de courbes, trajectoires orthogonales, problèmes variationnels*]

3 - Stabilté, points singuliers:

. Stabilité, instabilité[ZQ95, p.374][Dem96, p.265]

. Points singuliers d'un champ de vecteur. Etude dans $\mathbb{R}^2$ [*exemple du pendule, cf. [HS90, p.182]*]

. Théorème de linéarisation[ZQ95, p.382][Dem96, p.278]

. Fonctions de Lyapunov, application à l'équation de Voltera-Lotka[HS90, p.166][GT96a, p.166]

7	Théorème de Hadamard : une CNS de difféomorphie	***
18	Etude de l'équation différentielle de Voltera-Lotka [*expliquer le caractère périodique*]	***

2.221 Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

1 - Généralités:

. Existence de solution

. Systèmes à coefficients constants[Dem96, p.182] [*formule exponentielle, avec second membre, exemple du champ magnétique, équation d'ordre p*]

. Systèmes à coefficients variables[Dem96, p.194] [*résolvante, wronskien, variation des constantes*]

. Groupe à un paramètre de difféomorphisme [*théorie des systèmes autonomes*]

2 - Etude qualitative:

. Points singuliers d'un champ de vecteur. Etude dans $\mathbb{R}^2$[ZQ95, p.375][Dem96, p.271]

. Problème de Sturm-Liouville[ZQ95, p.395]

. Recherche de solutions développables en séries entières

. Etude des équations de Hill-Mathieu[ZQ95, p.401]

3 - stabilité et linéarisation:

. Stabilité, instabilité[ZQ95, p.374][Dem96, p.265]

. Petites perturbations d'un système linéaire[Dem96, p.268]

. Théorème de linéarisation[ZQ95, p.382][Dem96, p.278]

. Fonctions de Lyapunov, application à l'équation de Voltera-Lotka[HS90, p.166][GT96a, p.166]

15	Développement en série entière des solutions d'une équation différentielle du second ordre	***
59	Groupes à paramètres d'automorphismes [*insister sur la définition du flot*]	***

2.222 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

1 - Quelques équations classiques:

. Equations à variables séparées[Dem96, p.144]

. Utilisation d'intégrales premières[Dem96, p.148]

. Exemple du système de Voltera-Lotka

. Quelques situations géométriques [*famille de courbes, trajectoires orthogonales, problèmes variationnels*]

2 - Systèmes différentiels linéaires:

. Systèmes à coefficients constants[Dem96, p.182] [*formule exponentielle, avec second membre, exemple du champ magnétique, équation d'ordre p*]

. Systèmes à coefficients variables[Dem96, p.194] [*résolvante, wronskien, variation des constantes*]

. Problème de Sturm-Liouville[ZQ95, p.395]

. Etude des équations de Hill-Mathieu[ZQ95, p.401]

. Recherche de solutions développables en séreis entières

3 - Méthodes numériques de résolution d'équation différentielles:

. Méthodes à un pas[Dem96, p.203] [*méthodes d'Euler explicite, implicite, Runge Kutta*]

. Méthodes consistantes, stables, convergentes[Dem96, p.210]

. Méthodes à pas multiples[Dem96, p.235] [*Adams-Bashforth, PEC*]

. Application à Voltera-Lotka

18	Etude de l'équation différentielle de Voltera-Lotka [*faire un paragraphe sur les équation à variables déparées*]	***
15	Développement en série entière des solutions d'une équation différentielle du second ordre	***

2.223 Suites de nombres réels ou complexes: convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications.

1 - Convergence des suites:

. Définitions, utilisation de la compacité [*convergence, critère de Cauchy, limite sup, image d'une suite CV, compacité*]

. Méthode d'Euler-MacLaurrin, développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta, méthode de Romberg*]

. Exemple de la croissance des groupes finis

2 - Approximation dans $\mathbb{R}$:

. Résolution d'équations[Dem96, p.93] [*méthode de Newton*]

. Approximation des réels par des rationnels

. Fractions continues

3 - Suites équiréparties:

. Définitions

. Critères de Weil

. Exemples et applications

10	Suites équiréparties modulo 1	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications [*insister sur les problème de rapidité de convergence, d'accélération*]	***

2.224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

1 - Convergence des suites:

. Définitions, utilisation de la compacité

. Méthode d'Euler-MacLaurrin, développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta*]

. Critères Tauberiens

. Exemple de la croissance des groupes finis

2 - Approximation dans $\mathbb{R}$:

. Résolution d'équations[Dem96, p.93] [*méthode de Newton*]

. Approximation des réels par des rationnels

. Fractions continues

3 - Intégration numérique, applications:

. Méthodes de Newton-Cotes

. Méthodes de Gauss

. Méthode de Romberg

11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***
12	Théorème Tauberien fort	***
10	Suites équiréparties modulo 1 [*insister sur les critères mettant en jeu la rapidité de convergence*]	***

2.225 Comportement d'une suite définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

1 - Suites réelles, applications à l'approximation:

. Suites récurrentes, points attractifs[Pom84, p.94][Dem96, p.93]

. Méthode de Newton en dimension 1

. Approximation des réels par des rationnels, fractions continues

2 - En dimensions supérieures:

. Thorème du point fixe contractant

. Application à la résolution itérative de systèmes linéaires

. Méthode de Newton en dimension supérieure

3 - Optimisation:

. Méthodes de gradient

. Optimisation sous contrainte et théorème de Stampachia

8	Théorème des familles normales et théorème de Cartan [*admettre le théorème des familles normales*]	***
6	Méthode de Newton	***

2.226 Développement limité, développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

1 - Développements limités, premières applications:

. Définitions, formule de Taylor

. Fonctions C^∞, fonctions plates [*théorème de Borel*]

. Applications [*inégalités de Kolmogorov, courbes et surfaces, séries génératrices*]

2 - Séries entières et fonctions analytique:

. Définitions

. Comportement sur le bord du disque [*abel radial et théorème taubérien*]

. Points singuliers [*théorème de lacunes de Hadamard*]

3 - Méthode d'Euler-MacLaurin, développements asymptotique:

. Formule d'Euler-MacLaurin

. Premières applications [*calcul des zeta(2k), convergence de séries*]

. Quelques développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta*]

. Application à l'intégration numérique : méthode de Romberg

11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***
12	Théorème Tauberien fort	***

2.227 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

1 - Généralités:

. Continuité[Pom84, p.94] [*points de discontinuité d'une fonction croissante, densité, fonctions à variations bornées*]

. Dérivabilité[Pom84, p.84] [*fonction nulle part dérivable, prolongement, théorème des accroissements finis, valeurs intermédiaires*]

. Compacité et connexité [*action des fonctions continues sur ces deux notions, théorème de Heine*]

2 - Fonctions C^∞ et fonctions analytiques:

. Dérivabilité d'ordre supérieure[Pom84, p.89] [*formule de Leibniz*]

. Formules de Taylor et applications [*inégalités de Kolmogorov*]

. Fonctions plates [*théorème de Borel*]

. Fonctions analytiques

. Convergence sur le bord, théorème d'Abel et théorème taubérien [*utilise le théorème de Stone-Weierstrass*]

3 - Espaces de fonctions continues:

. Norme uniforme, polynôme de meilleure approximation
. Théorème de Stone-Weierstrass, applications [*théorème taubérien*]
. Théorème d'Ascoli et opérateurs à noyaux [*parler d'équations intégrales*]

12	Théorème Tauberien fort	***
21	Théorème de Kolmogorov	***

2.228 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

1 - Généralités:
. Critères de convexités
. Inégalités de convexités
. Fonctions monotones et à variations bornées
2 - Optimisation, programmation convexe:
. Log convexité, applications [*ellipsoïdes de John, exemple de la fonction Gamma*]
. Méthodes de gradient, théorème de Stampachia
. Programmation convexe, relation de Kuhn et Tucker
3 - Points extrémaux et programmation linéaire:
. Ensembles convexes, points extrémaux
. Présentation du problème
. Existence de solution en programmation linéaire

17	Optimisation sous contraintes et théorème de Stampachia [*méthode de gradient avec projection pour une fonction convexe*]	***
51	Sous groupes compacts de $GL(E)$, utilisation des ellipsoïdes de volume minimal [*insister sur la log convexité du déterminant*]	***

2.229 Séries de nombres réels ou complexes: convergence, convergence absolue, comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

1 - Généralités:
. Critères généraux de convergence [*critères de Cauchy, condensation, séries de Bertrand*]
. Séries à termes positifs [*équivalent des sommes partielles, comparaison avec intégrales*]
. Semi-convergence [*séries alternées, transformation d'abel*]
2 - Formule d'Euler-MacLaurin, développements asymptotiques:
. Formule d'Euler-MacLaurin
. Premières applications [*calcul des $\zeta(2k)$, convergence de séries*]
. Quelques développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta*]
3 - Théorèmes Taubériens:
. Convergence radiale de séries entière, aspect réciproque
. Théorème Taubérien d'Ikéhara

12	Théorème Tauberien fort	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications [*insister sur la formule d'Euler-MacLaurin*]	***

2.230 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries.

1 - Généralités:

. Critères généraux de convergence [*critères de Cauchy, condensation, séries de Bertrand*]

. Séries à termes positifs [*équivalent des sommes partielles, comparaison avec intégrales*]

. Semi convergence [*séries alternées, transformation d'Abel*]

2 - Produits de séries, sommation par paquet:

. Produit de séries

. Sommation par paquets

. Séries doubles

3 - Formule d'Euler-MacLaurin, développements asymptotiques:

. Formule d'Euler-MacLaurin

. Premières applications [*calcul des zeta(2k), convergence de séries*]

. Quelques développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta*]

12	Théorème Tauberien fort [*insister sur l'aspect réciproque du théorème d'Abel*]	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***

2.231 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

1 - Utilisation de méthodes de points fixes:

. Points fixes attractifs, répulsifs

. Premières méthodes [*dichotomie, sécante, Newton*]

. Résolution itérative de systèmes linéaires

2 - Méthodes de gradient, optimisation:

. Gradient conjugué, minimisation au sens des moindre carrés

. Optimisation sous contrainte et théorème de Stampachia

3 - Systèmes d'équations polynomiales:

. Première approche : résultant et élimination

. Deuxième approche : bases de Gröbner

. Une fois en dimension un : recherche des solutions [*méthode de Laguerre, suites de Sturm*]

4 - Equations fonctionnelles : exemple des équations intégrales:

. Présentation du problème

. Méthode de Nyström

6	Méthode de Newton	***
2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***

2.232 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

1 - Intégrale de Lebesgue:

. Théorèmes de convergence

. Espaces L^p, étude de l'espace L^2 [*étude de l'inclusion $L^p \subset L^q$*]

. Théorème de Radon-Nikodym

2 - Comportement asymptotique:

. Equivalents paraboliques[Pom84, p.128]

. Formule d'Euler-MacLaurin, premières applications

. Recherche de développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta*]

3 - Calcul approché d'intégrales:

. Méthodes de Newton-Cotes

. Méthodes de Gauss

. Méthode de Romberg

. Equation intégrales, méthode de Nyström

11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***
19	Etude de l'inclusion $L^p \subset L^q$	***

2.233 Espaces L^p, $p \in [1,\infty]$

1 - Intégrale de Lebesgue:

. Théorèmes de convergence [*convergence monotone, dominée*]

. Espaces L^p [*étude de l'inclusion* $L^p \subset L^q$]

. Dualité

2 - Densité et séparabilité:

. Théorèmes de densité

. Séparabilité

. Convolution et régularisation

3 - Les espaces L^2:

. Polynômes trigonométriques, polynômes orthogonaux, densité[Rud87, p.190]

. Théorie L^2 des séries de Fourier

. Application à l'équation de la chaleur[DMK72, p.63] [*sur le cercle, sur un intervalle, chaleur de la terre*]

. Transformée de Fourier [*parler de la densité des fonctions à spectre borné*]

19	Etude de l'inclusion $L^p \subset L^q$	***
20	Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes	***

2.234 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

1 - Théorèmes d'interversion:

. Convergence des intégrales [*théorèmes de convergence monotone, dominée ...*]

. Fonctions définies par des intégrales[ZQ95, p.298] [*théorèmes de régularité, fonction zeta, gamma*]

. Prolongement de la fonction ζ

2 - Convolution et transformée de Fourier:

. Convolution et régularisation[ZQ95, p.311]

. Transformée de Fourier et application[ZQ95, p.320][DMK72, p.106] [*équation d'onde*]

. Fonctions à spectre borné

. Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes

3 - Etude asymptotique:

. Méthode de Laplace

. Formule d'Euler-MacLaurin et applications [*fonction Gamma, Zeta*]

14	Le théorème des nombres premiers [*insister sur la transformée de Laplace*]	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications [*permet d'obtenir de équivalent de Gamma*]	***
20	Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes	***

2.235 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

1 - Méthodes exactes:

. Changement de variables[Pom84, p.287]

. Théorème de Fubini

. Méthode des résidus[Pom84, p.360]

2 - Calcul approché d'intégrales:

. Méthodes de Newton-Cotes

. Méthodes de Gauss

. Méthode de Romberg [*faire une partie sur les applications aux développements asymptotiques*]

. Calcul des coefficients de Fourier via la FFT

3 - Equations intégrales:

. Position du problème

. Méthode de Nyström

11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***
2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***

2.236 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 - Intégrales généralisées:

. Généralités[Pom84, p.147] [*critère de Cauchy, convergence absolue, domination*]

. Fonctions positives, équivalents, comparaison séries/intégrales

2 - Intégrales dépendant d'un paramètre:

. Théorèmes de régularité

. Transformée de Fourier, applications

. Transformée de Laplace, applications [*théorème Taubérien d'Ikehara*]

. Méthode de Laplace

3 - Comportement asymptotique:

. Equivalents paraboliques[Pom84, p.128]

. Formule d'Euler-MacLaurin, premières applications

. Recherche de développements asymptotiques [*fonction gamma, zeta*]

14	Le théorème des nombres premiers [*insister sur la transformée de Laplace*]	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***

2.237 Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.

1 - Méthodes de quadrature:

. Généralités

. Méthodes d'Euler-MacLaurin

. Polynômes orthogonaux et méthode de gauss

. Calcul des coefficients de Fourier via la FFT

2 - Méthode de Romberg:

. Formule d'Euler-MacLaurin, premières applications [*citer quelques développements asymptotiques*]

. Procédé d'accélération de convergence de Richardson

. Méthode de Romberg

3 - Application aux équations intégrales:

. Présentation du problème

. Méthode de Nyström

. Equation de la radiosité, résolution itérative [*insister sur l'existence de singularités*]

11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications	***
2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***

2.238 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

1 - Généralités, premiers exemples:

. Résultats de régularité

. La fonction Γ [*prolongement, log-convexité*]

. La fonction ζ [*prolongement, équation fonctionnelle*]

2 - Transformée de Fourier:

. Définition et propriétés

. Application aux équations différentielles ordinaires

. Application à l'équation d'ondes

. Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes

3 - Approximation, régularisation, équivalent asymptotiques:

. Convolution et régularisation, applications [*densité dans L1, fonction à transformée de Fourier à support compact*]

. Un théorème tauberien sur la transformée de Laplace

. Formule d'Euler-MacLaurin, application aux développement asymptotiques

20	Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes	***
2	Méthode de Nyström de résolution des équations intégrales	***

2.239 Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.

1 - Produit de convolution:

. Définition

. Régularisation

. Résultats de densité

2 - Transformée de Fourier:

. Définition, première propriétés

. Fonction à transformée de Fourier à spectre borné

. Transformée de Fourier discrète

3 - Applications aux équations différentielles:

. Application aux équations différentielles ordinaires

. Application à l'équation d'ondes

62	Transformée de Fourier discrète [*application de la FFT au calcul de coefficients de Fourier et à la résolution de l'équation de Poisson*]	***
20	Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes	***
25	Densité des fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact	***
61	Transformée de Fourier sur un groupe fini [*expliquer comment le produit de convolution permet de multiplier des polynômes*]	***

2.240 Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.

1 - Généralités:

. Convergence, convergence uniforme[Pom84, p.164]

. Séries de fonctions [*critère d'Abel*]

. Exemple de la fonction ζ

. Formule d'Euler-MacLaurin et recherche de développements asymptotiques [*illustrer avec la fonction zeta*]

2 - Séries entières:

. Définitions, premières propriétés

. Convergence radiale, aspect réciproque

. Points réguliers et points singuliers

. Recherche de solutions d'équations différentielles développables en séries entières

3 - Fonctions elliptiques:

. Définitions et propriétés

. Fonction $\wp$ de Weierstrass

5	La fonction $\wp$ de Weierstrass	***
12	Théorème Tauberien fort	***

2.241 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

1 - Exemples fondamentaux:

. Exemples introductif : la fonction ζ

. Utilisation des séries entières [*résolution d'EDP, convergence radial et théorème tauberien*]

. Formule d'Euler-MacLaurin et recherche de développements asymptotiques

2 - Série de Fourier et résolution d'EDP:

. Théorie L^2 des séries de Fourier

. Convergence ponctuelle, applications [*calcul de somme, inégalité iso-périmétrique, inégalité de Wirtinger, fonction ta, suites équi-réparties*]

. L'équation de la chaleur [*sur le tore, sur un segment, chaleur de la terre*]

3 - Fonctions elliptiques:

. Définitions et propriétés

. Fonction $\wp$ de Weierstrass

4	Résolution de l'équation de la chaleur	***
5	La fonction $\wp$ de Weierstrass	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications [*développement de la fonction zeta*]	***

2.242 Séries entières: convergence, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1 - Généralités:

. Définitions, premières propriétés

. Régularité

. Premières applications [*résolution d'EDO, séries génératrices*]

2 - Fonctions analytiques:

. Définition

. Développement en série entière

. Fonctions plates [*théorème de Borel*]

3 - Comportement sur le bord du disque:

. Convergence radiale, aspect réciproque

. Points réguliers et points singuliers

. Théorème des lacunes

3	Théorème des lacunes de Hadamard	***
12	Théorème Tauberien fort	***

2.243 Développement d'une fonction en série entière, fonctions analytiques. Exemples et applications.

1 - Développement en séries entières:

. Formules de Taylor, applications[Pom84, p.100] [*théorème de Kolmogorov*]

. Intégration, dérivation, exemples classiques

. Application aux EDO, séries génératrices

2 - Fonctions analytiques:

. Définition

. Fonctions plates [*théorème de Borel*]

3 - Comportement sur le bord de convergence:

. Convergence radiale, aspect réciproque

. Points réguliers et points singuliers

. Théorème des lacunes

12	Théorème Tauberien fort	***
3	Théorème des lacunes de Hadamard	***

2.244 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

1 - Généralités:

. Définitions

. Formule de Cauchy, analycité

. Topologie de la convergence uniforme, applications [*théorème de Cartan, hypercylicité de la dérivation*]

2 - Fonctions analytiques:

. Principe du maximum

. Prolongement analytique [*donner l'exemple de la fonction zeta, application aux polynômes orthogonaux*]

. Points réguliers, théorème des lacunes de Hadamard

3 - Aspect géométrique:

. Applications conformes

. Etude d'un fluide incompressible

16	Représentation conforme et fluides incompressibles	***
3	Théorème des lacunes de Hadamard	***
8	Théorème des familles normales et théorème de Cartan	***

2.245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

1 - Holomorphie:

. Définitions

. Formule de Cauchy, analycité

. Topologie de la convergence uniforme, applications [*théorème de Cartan, hypercylicité de la dérivation*]

. Prolongement analytique [*donner l'exemple de la fonction zeta*]

2 - Fonctions méromorphes et elliptiques:

. Formule des résidus, applications

. Fonctions elliptiques

. Fonction $\wp$ de Weierstrass

3 - Aspect géométrique:

. Applications conformes

. Etude d'un fluide incompressible

5	La fonction $\wp$ de Weierstrass	***
16	Représentation conforme et fluides incompressibles	***

2.246 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

1 - Séries de Fourier:

. Théorie L^2 des séries de Fourier

. Convergence ponctuelle [*premières applications au calculs de sommes*]

. Application aux suites équiréparties

. Calculs pratiques des coefficients de Fourier via la FFT

2 - Applications variées:

. Formule de Poisson, prolongement de la fonction ζ

. Inégalités [*inégalités iso-périmétrique, Wirtinger*]

. Approximation polynomiale

3 - Application aux équations différentielles:

. Equation de la chaleur[DMK72, p.46] [*sur un cercle, sur un segment*]

. Principe du maximum, utilisation de l'énergie[ZQ95, p.103]

. Température de la terre

. Equation d'onde

4	Résolution de l'équation de la chaleur	***
11	Formule d'Euler-MacLaurin, applications [*pour avoir un équivalent des nombres de Bernouilli*]	***

2.247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

1 - Théorèmes de convergence et de régularité:

. Utilisation de la convergence uniforme

. Intégration Lebesgue, théorèmes de convergence

. Intégrales généralisées

2 - Intégrales dépendant d'un paramètre:

. Résultats de régularité

. Etude des fonctions ζ et Γ

. Méthode de Laplace

3 - Théorèmes taubériens:

. Continuité d'Abel radiale, aspect réciproque

. Transformée de Laplace[Pom84, p.197]

. Prolongement de la transformée de Laplace, théorème taubérien

12	Théorème Tauberien fort	***
14	Le théorème des nombres premiers [*insister sur l'utilisation de la transformée de Laplace*]	***

2.248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.

1 - Interpolation et approximation polynomiale:

. Interpolation de Lagrange

. Théorème de Weierstrass

. Application : un théorème tauberien

. Fonctions splines, courbes de Bézier

2 - Approximation dans les espaces fonctionnels:

. Polynôme de meilleure approximation

. Méthodes de projection

3 - Application aux formules de quadrature:

. Formules de quadrature

. Méthodes de Newton-Cotes

. Méthodes de Gauss

12	Théorème Tauberien fort	***
80	Polynômes orthogonaux [*insister sur le polynôme de meilleure approximation*]	***

2.249 Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).

[pas de développements]

2.250 Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.

[pas de développements]

2.251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

[pas de développements]

Références

[Ale99] Alessandri. *Thèmes de géométrie*. Masson, 1999.

[Arn74] V Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. Librairie du globe, 1974.

[Arn76] V Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. MIR, 1976.

[Aud98] Michèle Audin. *Géométrie pour l'agrégation*. Belin, 1998.

[Bou58] Nicolas Bourbaki. *Elements de mathématiques. Fonctions d'une variable réelle*. Herman, 1958.

[Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1983.

[Car61] Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions d'une variable complexe*. Herman, 1961.

[Car97] Cartan. *Calcul différentiel*. Herman, 1997.

[Cia90] Philippe G. Ciarlet. *Introduction à lanalyse numérique et à l'optimisation*. Dunod, 1990.

[CL93] A. Chambert-Loir. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*. Masson, 1993.

[CLO96] D. Cox, J. Little, and O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 2nd ed.* Springer-Verlag, 1996.

[CLR92] Thomas Cormen, Charles Leiserson, and Ronald Rivest. *Introduction à l'algorithmique*. Dunod, 1992.

[CS97] David A. Cox and Bernd Sturmfels. *Applications of computational algebraic geometry*. American Mathematical Society, 1997.

[Dem96] Jean Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP, 1996.

[Dem97] Michel Demazure. *Cours d'algèbre. Primalité, divisibilité, codes*. Cassini, 1997.

[Des86] Roger Descombes. *Elements de théorie des nombres*. PUF, 1986.

[DMK72] H. Dym and HP. Mc Keam. *Fourier series and integrals*. Academic press, 1972.

[Dub53] Dubreil. *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Gauthier-Villars, 1953.

[FGS90] Christine Froidevaux, Marie-Claude Gaudel, and Michèle Soria. *Types de données et algorithmes*. Ediscience international, 1990.

[Gan66] F.R. Gantmacher. *Théorie des matrices, T2*. Dunod, 1966.

[Gob95] Goblot. *Algèbre commutative*. Masson, 1995.

[Gou94a] X. Gourdon. *Les maths en tête, algèbre*. Ellipse, 1994.

[Gou94b] X. Gourdon. *Les maths en tête, analyse*. Ellipse, 1994.

[GT96a] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Thème d'analyse pour l'agrégation, Calcul différentiel*. Ellipses, 1996.

[GT96b] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Thème d'analyse pour l'agrégation, Topologie et analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.

[HS90] Morris W. Hirsh and Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic press, 1990.

[Kli78] Wilhelm Klingenberg. *A course in differential geometry*. Springer Verlag, 1978.

[Kre99] Rainer Kress. *Linear integral equations*. Springer Verlag, 1999.

[LB88] Daniel Lehman and Rudolphe Bkouche. *Initiation à la géométrie*. PUF, 1988.

[Leb96] Leborgne. *Calcul différentiel complexe*. PUF, 1996.

[Mal00] Stéphane Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'école Polytechnique, 2000.

[Mar65] A.I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable.* 1965.

[Mig89] Maurice Mignotte. *Mathématiques pour le calcul formel.* PUF, 1989.

[MT97] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Herman, 1997.

[Pom84] Pommelet. *Cours d'analyse.* Ellipses, 1984.

[Rud87] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 1987.

[Ser70] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique.* PUF, 1970.

[Tos99] Nicolas Tosel. *Une forme faible du théorème taubérien de Wiener-Ikehara.* RMS, 1999.

[Vid01] Romain Vidonne. *Groupe circulaire, rotations et quaternions.* Ellipses, 2001.

[War71] Warusfel. *Structures algébriques finies.* Hachette, 1971.

[Zis96] Michel Zisman. *Mathématiques pour l'agrégation.* Dunod, 1996.

[ZQ95] Zuily and Queffelec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.

Index