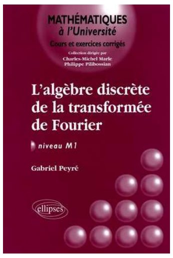
Comment utiliser le livre *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier* pour l'Agrégation

Gabriel Peyré

2 mars 2004



Références :
L'algèbre discrète de la transformée de Fourier
Gabriel Peyré
Editions Ellipses Marketing, 2004
ISBN : 2729818677
URL : `http://www.cmap.polytechnique.fr/~peyre/adtf/`

Table des matières

Ce fascicule présente, pour un grand nombre de leçons d'Agrégation, les points abordés dans le livre s'y rapportant. Plusieurs cas de figure sont à envisager.

- Dans les cas les plus favorables, c'est l'ensemble de la leçon ou une partie entière qui peu s'appuyer sur le contenu du livre. Par exemple la leçon 101 peut être enrichie considérablement à partir des exemples d'actions de groupes présents dans les chapitres VII et VIII.
- D'une façon plus raisonnable, de nombreux points clef du programmes peuvent être illustrés par des applications tirées du livre. Bien souvent, ceci permettra de montrer au jury une prise de conscience de l'utilité de tel ou tel outil mathématique. Un exemple typique est celui des codes correcteurs (devenu un classique) pour illustrer les corps finis ou les polynômes (leçons 112 et 118).
- Enfin, les leçons de calcul scientifique peuvent être préparées de façon très approfondie grâce au contenu du livre (qui est soutenu par des programmes Matlab et Maple). On retrouve même dans les textes proposés à l'oral cette années des notions abordées dans le livre.

Les listes de leçons présentées sont conformes au programme de l'Agrégation de Mathématiques de 2003.

1 Leçons d'Algèbre

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- L'idée de base de la théorie des représentations, chapitre VII, est d'étudier les actions linéaire de groupe.
- Il y a de jolies applications de la théorie des représentations aux études statistiques (section VI.3.3 p.235).
- La *transformée en ondelettes* exploite l'action du groupe affine. Pour une version sur un corps fini, voir exercice VII.11 p.223.
- Les actions linéaires sur les polynômes permettent d'introduire la notion de polynômes invariant (comme par exemple les polynômes symétriques). Voir section VII.1.2 p.197 pour la définition, l'exercice VII.5 p.218 pour une description de l'anneau invariant, le théorème de *Molien* (exercice VII.6), et les exercices VII.8 et VIII.9 p.239 pour une application aux codes correcteurs.
- Le lemme de *Cauchy-Frobenius* est très utile. Une jolie application au dénombrement à l'exercice VII.7 p.220, et bien sûr la démonstration de l'irréductibilité de la représentation standard (dernière question).
- On peut étudier la notion de base orthonormée sous l'action d'un groupe fini. L'exercice I.7 p.22 présente le cas continu, I.8 le cas discret, et III.11 p.91 étudie plus précisément les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On pourra faire le parallèle avec l'orthogonalisation de *Gram-Schmidt*, qui elle n'est pas intrinsèque (il faut faire d'abord un choix pour l'ordre des vecteurs de base) : le fait d'avoir une action de groupe permet de ne pas choisir d'ordre privilégié.
- L'étude des fonctions centrale (section VII.5.2) s'intéresse aux fonctions invariantes sous l'action de conjugaison.

Leçon 103 : Sous-groupes distingués, groupes quotients. Exemples et applications.

- L'étude du dual d'un groupe G montre que $\widehat{G}$ est isomorphe à $G/D(G)$. On peut donner l'exemple du groupe symétrique. Voir chapitre I.
- La démonstration de $|G| = |\widehat{G}|$ (section I.2.1 p.6) utilise une récurrence avec un quotientage.
- L'étude des sous groupes distingué (et de la simplicité) via la théorie des représentations est extrêmement puissante. Voir paragraphe VIII.2.1 p.230.
- L'exercice VIII.6 p.236 étudie les représentations d'un groupe simple.
- Les réalisations géométrique des groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ comme agissant sur des polyèdres sont abordées aux exercices VIII.3 et VIII.4 p237, et à la section VIII.1.4 p.228.

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

- Il est possible de faire cette leçon entièrement avec le livre. La question est de savoir quoi ne pas mettre !
- Le plus simple est de faire une distinction commutatif/non commutatif. On peut intercaler une section « application » qui étudie les applications de la TFD.

- Dans les deux cas, introduire la dualité vers le début, en donnant surtout des exemples. Axer le débat sur certain point. Comparer le cas commutatif et non commutatif, motiver en conclusion l'introduction de la théorie des représentation (avec pourquoi pas une brève définition).
- Les groupes diédraux sont abordés à la section VIII.1.3 p.227 et à l'exercice VIII.2. Ce sont parmi les exemples les plus simples de groupes non commutatifs.
- Un autre exemple de groupe produit semi direct est celui du groupe affine, par exemple sur un corps fini, exercice VII.10 p.222.
- On peut aussi axer l'étude sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, avec par exemple le théorème de *Brauer*, section VII.1.4 p.202 avec aussi l'étude du dual à la même section.
- On peut étudier la notion de base orthonormée sous l'action d'un groupe fini. L'exercice I.7 p.22 présente le cas continu, I.8 le cas discret, et III.11 p.91 étudie plus précisément les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Si on parle de représentations, on peut faire un développement sur le déterminant d'un groupe (exercice VII.9 p.221) qui est une généralisation des déterminant cycliques (exercice I.1 p.19) à un groupe non commutatif.

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- L'étude du dual groupe symétrique est faite section I.3.1 p.11.
- La représentation du groupe $\mathfrak{S}_4$ est étudiée à la section VIII.1.4 p.228.
- Les réalisations géométrique des groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ sont abordées aux exercices VIII.3 et VIII.4 p237.
- L'étude de l'irréductibilité de la représentation régulière peut être évoquer sans même parler de représentation (expliquer que l'on cherche si l'on peut trouver des sous espace stable autre que $\{x_1+\cdots+x_n=0\}$). La démonstration est très importante, avec un aspect action de groupe. Exercice VII.7 p.220.
- La représentation par permutation est étudiée à la section VII.1.4 p.201. Le théorème de *Brauer* est un excellent développement.

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- La théorie des représentation linéaire peut être abordée comme étude des morphismes d'un groupe G dans $GL(n)$. Il s'agit de réaliser G comme un groupe de transformation (chapitre VII).

Leçon 107 : Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$, de $O(3,\mathbb{R})$. Applications.

- Les réalisations géométrique des groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ comme agissant sur des polyèdres sont abordées aux exercices VIII.3 et VIII.4 p237.
- D'une façon plus théorique, on peut évoquer le fait que toute représentation peut être rendue unitaire, et même souvent orthogonale, ce qui prend une signification géométrique. Voir le début du chapitre VII.
- Les groupes diédraux sont abordés à la section VIII.1.3 p.227 et à l'exercice VIII.2.

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe.

- On peut aborder la décomposition d'un groupe abélien en groupes cycliques (qui revient à choisir des « bons » générateurs). Section I.2.2 p.8.
- Le fait que $\mathbb{F}_p^*$ soit cyclique est très important, (voir par exemple exercice V.9 p.155). On peut ainsi parler de la formule d'*Euler*, lemme II.1.1 p.28.
- On peut parler du groupe diédral (section VIII.1.3 p.227 et à l'exercice VIII.2) et utiliser une présentation avec générateurs et relation.

Leçon 109 : Congruences dans $\mathbb{Z}$, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Encore une leçon que l'on peut remplir uniquement avec l'ADTF. Tout le chapitre I constitue une partie.
- L'étude de la décomposition d'un groupe abélien en groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est très importante, et fournit l'isomorphisme $G \simeq \widehat{G}$. De plus, ceci mène à une méthode constructive, puisque l'on peut faire la TFD d'une image comme une décomposition dans la base des caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- On peut étudier les équations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, voir à ce sujet l'exercice I.5 p.20 et II.2 p.52.
- Comme illustration des congruences, il y a la transformation de *Cooley-Tukey* (section III.2.4 p.70) et l'algorithme de *Good-Thomas* (exercice III.2 p.84), qui utilise le lemme chinois.
- L'étude des fonctions booléennes apporte de nombreuses idées nouvelles (introduction des polynomes et fonctions affines), elle est faite aux exercices VI.4 p.186 et VI.5 p.187.
- La section VI.2 p.163 introduit la transformée de Fourier sur un anneau (en particulier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). La notion de racine principale est très importante.
- La transformée de *Walsh* sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$, section II.2 p.39 possède de nombreuses applications, comme par exemple l'idendité de *MacWilliams*.

Leçon 110 : Nombres premiers. Applications.

- Il faut impérativement parler des corps finis, voir à ce sujet la leçon 112 (applications aux codes correcteurs, sommes de *Gauss*, etc.).
- L'utilisation de la cyclicité de $\mathbb{F}_q^*$ est constante, au paragraphe VI.1.2 p.159, mais aussi par exemple dans l'algorithme *chirp*, exercice V.9 p.155. On peut aussi parler de la formule d'*Euler*, lemme II.1.1 p.28.
- On peut aborder les équations algébriques sur un corps fini, en particulier l'équation de *Fermat*, exercice II.2 p.52.

Leçon 111 : Idéaux d'un anneau commutatif unitaire. Exemples et applications.

- La principale illustration est l'étude des idéaux de $K[X]/(X^n - 1)$ pour les codes correcteurs cycliques, section VI.3.3 p.173. Ceci illustre la principalité.

Leçon 112 : Corps finis. Applications.

- Le chapitre II évoque les sommes de *Gauss*, avec la réciprocité quadratique. La démonstration géométrique, exercice II.1 p.52 fournit un développement très original.

- Le début du chapitre VI fournit une très bonne introduction (comment représenter les éléments d'un corps fini, etc).
- La fin du chapitre présente la théorie des codes correcteurs sur un corps fini, qui est une illustration très importante (sur le thème « géométries finies »).
- On peut aborder la transformée de Fourier (voir section VI.1.1 p.156), qui est un morphisme capital, utilisé par exemple pour décoder les *codes BCH.*
- Il faut insister sur le fait que $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique, avec les conséquences (voir par exemple exercice V.9 p.155). On peut ainsi parler de la formule d'*Euler*, lemme II.1.1 p.28.
- La transformée en ondelettes exploite l'action du groupe affine. Pour une version sur un corps fini, voir exercice VII.11 p.223.
- On peut aborder les équations algébriques sur un corps fini, en particulier l'équation de *Fermat*, exercice II.2 p.52.
- Un exemple anectodique mais amusant : la transformée de *Hartley* sur $\mathbb{F}_p$, exercice V.5 p.153.

Leçon 113 : Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.

- Toute la théorie des caractères repose sur les morphismes à valeurs dans $\mathbb{U}$.
- On peut ensuite exploiter les propriétés de la TFD. Ceci peut compléter environ 1/3 de la leçon.

Leçon 115 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

- La transformée en Z (i.e. les séries entières sur $\mathbb{C}$) permet de calculer la fonction de transfert sur une couronne. Ceci permet d'attaquer le problème de stabilité (proposition V.2.10 p.140). On tombe souvent sur des fractions rationnelles (filtres récursifs), et la décomposition en éléments simples permet d'étudier le filtre (section V.2.3 p.141).

Leçon 116 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

- L'étude de la réductibilité des polynômes cyclotomique est à la base de la construction de codes correcteurs. On comprend ce qu'est la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Voir section VI.1.3 p.159.

Leçon 117 : Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.

- Le déterminant d'un groupe permet de manipuler le déterminant comme un polynôme (irréductible) en n^2 variables, exercice VII.9 p.221.
- L'étude de la représentation linéaire d'un groupe fini sur les polynômes est très intéressante (définition à la section VII.1.2 p.197).
- Les théorèmes de *Noether*, exercice VII.5 p.218, et de *Molien*, exercice VII.6, font d'excellents développements.
- Le polynôme énumérateur à deux variables (section II.3.2 p.48 et section VI.4.1 p.179) permet d'étudier la répartition de poids des codes linéaires.

Leçon 118 : Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

- La multiplication de polynômes peut occuper tout une section. Voir la section IV.5 p.117.
- On peut présenter l'algorithme de *Karatsuba*, exercice IV.11 p.128.
- Les codes correcteurs cycliques utilisent de façon fondamentale les polynômes sur un corps finis, modulo $X^n - 1$. Ceci illustre le fait que cet anneau est principal. Voir section VI.3.3 p.173.
- Les polynômes de *Chebyshev* (exercice III.7 p.87) ont des racines habilement placée dans $[-1,1]$, et sont ainsi très utile pour l'approximation uniforme.
- Le décodage des codes BCH (section VI.3.5 p.177) demande de déterminer les racines du polynômes localisateur d'erreurs.

Leçon 120 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

- On peut parler de la base des caractères, le fait que $\dim(\mathbb{C}[G]) = |G|$ montre qu'il suffit de montrer que la famille est orthogonale (donc libre).
- Lors de l'introduction de la notion de base d'un espace vectoriel, on peut étudier la notion de base orthonormée sous l'action d'un groupe fini. L'exercice I.7 p.22 présente le cas continu, I.8 le cas discret, et III.11 p.91 étudie plus précisément les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- L'introduction de la structure d'espace vectoriel dans les codes correcteurs permet d'en simplifier l'étude (section VI.3.4 p.169). La définition de la dimension d'un code est un des trois paramères important (dimension/taille/distance minimale).
- Dans le même ordre d'idée, la borne de *Singleton* (proposition VI.3.13 p.172) utilise la notion de rang.
- L'étude de l'opérateur de *Reynolds* (qui est un projecteur) permet d'avoir la dimension de l'espace des invariants (section VIII.2.3 p.205).

Leçon 121 : Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

- Il faut parler de diagonalisation (voir leçon 126). Voir en particulier l'exercice III.5 p.86.
- Le fait que l'on puisse toujours mettre un code sous forme systématique est utile pour coder et décoder un code linéaire (exercice VI.6 p.189). La formule de *Singleton* devient alors triviale à démontrer.
- La classification des représentations à équivalence près est très importante (section VII.1.3 p.198).

Leçon 122 : Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.

- Le fait que l'on puisse toujours mettre un code sous forme systématique est utile pour coder et décoder un code linéaire (exercice VI.6 p.189). La formule de *Singleton* devient alors triviale à démontrer.

Leçon 123 : Déterminant. Exemples et applications.

- L'étude des déterminants cycliques via les caractères, exercice I.1 p.19, avec le calcul par FFT. Il faut montrer que l'on à compris que diagonaliser permet de calculer un déterminant très facilement, et justement, les exponentielles de Fourier diagonalisent les opérateurs de convolution.
- La détermination du signe des sommes de *Gauss* (proposition II.1 p.20) demande l'évalutation d'un déterminant de deux façons différentes.
- Les matrices de *Hadamard* ont un déterminant maximal (exercice II.6 p.57).
- Le déterminant d'un groupe est une généralisation des déterminants cycliques à un groupe non commutatif. Exercice VII.9 p.221.
- Le théorème de *Molien* est un superbe développement. Exercice VII.6 p.219.

Leçon 124 : Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Faire un paragraphe sur l'étude des endomorphismes invariants par translation. Dire que ce sont des convolutions, et parler de la base des caractères qui diagonalise ces opérateurs.
- Voir exercice VII.9 p.221 dans le cas non commutatif.
- Parler de FFT est une très bonne chose, car ça explique la réelle utilité de la diagonalisation quand on peut la faire rapidement (temps $n\log(n)$) : on remplace un produit matriciel par un produit terme à terme. Voir chapitres I et II.
- Evoquer les nombreuses applications : produit de polynômes et d'entiers (section IV.5 p.117), filtrage (section IV.2 p.100) ...
- On peut évoquer les morphismes à valeurs dans un espace vectoriel sur un corps fini, et ainsi évoquer la convolution sur $\mathbb{F}_q$. Dire que tout ceci généralise la situation pour les $\mathbb{C}$-ev. Tout le chapitre VI est intéressant, sans trop parler de la transformée sur un module (FFT à valeur dans un anneau).
- Le développement ultime est l'étude de la TFD en tant que morphisme de $\mathbb{C}^n$. Son polynôme minimal est X^4-1, et l'étude de sa diagonalisation (c'est un morphisme hermitien) dans un base orthonormée fait l'objet des exercices III.9 et III.10 p.89. Ceci permet d'évoquer la notion très importante de co-diagonalisation.
- Cette notion de co-diagonalisation est au coeur de la théorie des représentations linéaires. Pour une représentation ρ, tous les $\rho(g)$ commutent entre eux, et donc on peut trouver des sous-bases stables communes à tous. Voir le début du chapitre VI.

Leçon 125 : Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- La théorie des représentations utilise de façon fondamentale la recherche de sous-espace stables pour l'ensemble des $\rho(g)$ (qui commutent). Le « unitarian trick » permet de considérer un produit scalaire invariant, et ainsi construire un supplémentaire stable (section VII.1.3 p.198).
- Les applications sont la décomposition des représentations, avec par exemple, l'étude de la simplicité, section VIII.2.1 p.230.

Leçon 126 : Endomorphismes diagonalisables.

- Voir la leçon 124. Il faut parler de la diagonalisation des endomorphismes cycliques, qui sont des convolutions. Insister sur les applications (filtrage, résolution d'EDP, calcul de produits ...)
- La résolution de l'équation de *Poisson* de façon matricielle donne une formulation différente et qui exploite habilement la diagonalisation dans la base de sinus (exercice IV.5 p.124).
- La diagonalisation de la FFT permet de calculer des transformée intermédiaires, exercices III.9 et III.10 p.89.

Leçon 132 : Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
- Rapprochement entre la dualité sur un groupe fini et sur un espace vectoriel, section II.2.1 p.39.
- Définition de la représentation duale, section VII.1.2 p.196.

Leçon 133 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
- Les endomorphismes symétriques sont très important, et pour illustrer le fait qu'ils diagonalisent en base orthonormée, on peut présenter la construction de la base de diagonalisation de la FFT par l'utilisation d'une matrice cyclique périodique.
- On peut étudier la notion de base orthonormée sous l'action d'un groupe fini. L'exercice I.7 p.22 présente le cas continu, I.8 le cas discret, et III.11 p.91 étudie plus précisément les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Le produit tensoriel permet de construire des matrices (et donc des transformations) orthogonales (exercice II.7 p.60).
- Les matrices de *Hadamard* (exercice II.6 p.57) sont des matrices orthogonales intéressantes.

Leçon 134 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
- Le fait que les caractère forment une base orthonormée montre que la transformée de Fourier est un morphisme unitaire.
- La TFD est peut être le morphisme unitaire le plus important. Dire qu'il correspond à une décomposition dans une base orthonormée (celle des caractères est fondamental).
- Peu de personnes connaissent l'étude de la diagonalisation de la TFD (exercices III.9 et III.10 p.89). C'est un développement passionnant.

Leçon 135 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.
- La FFT est un morphisme unitaire. En prenant les parties réelle et imaginaire des exponentielles de Fourier (mettre courte explication ici) on peut obtenir une isométrie. Ainsi on voit bien que la TFD peut être vue comme une rotation d'angle $\pi/2$, avec des plans stables compliqués à déterminer.
- La conservation de l'énergie (*Plancherel*) est capital, avec beaucoup d'application (principe d'incertitude exercices I.4 p.20, I.11 p.24 et I.9 p.23, inégalités géométriques section IV.3.1 p.106 sur les polygones).

Leçon 137 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

- On peut parler du filtrage de polygones, la TFD est vraiment un moyen très puissant pour étudier l'évolution des filtrages successifs (section IV.3.1 p.106).
- L'analogie moyennage (i.e. barycentrage) et filtrage passe bas est très importante.

Leçon 139 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

- L'étude des polygones est très sympathique (section IV.3.1 p.106), avec des connexions avec les inégalités iso-périmétriques.
- On peut présenter les descripteurs de formes, section IV.3.3 p.109.

Leçon 141 : Utilisation des groupes en géométrie.

- Parler des sous groupes finis de $O(2)$ et $O(3)$, avec les réalisations géométriques des groupes symétriques $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_3$, exercices VIII.3 et VIII.4 p237, et à la section VIII.1.4 p.228.
- Les groupes diédraux sont parmis les groupes non commutatifs les plus simples en géométrie (section VIII.1.3 p.227 et exercice VIII.2).

Leçon 144 : Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 et 3.

- L'étude des polygones est très sympathique (section IV.3.1 p.106), avec des connexions avec les inégalités iso-périmétriques.
- On peut présenter les descripteurs de formes, section IV.3.3 p.109.

Leçon 145 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

- Le lemme de *Cauchy-Frobenius* est très utile. Une jolie application au dénombrement à l'exercice VII.7 p.220.
- La démonstration du théorème de *Brauer*, section VII.1.4 p.202 repose sur des arguments combinatoires.
- Le dénombrement des solutions d'une équation sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ utilise la base des caractères, et permet d'étudier l'équation de *Fermat* (exercices I.3 et I.5 p.20 ainsi que II.2 p.52).
- L'étude de la répartition de poids d'un code fournit une intéressante démarche combinatoire (relation polynomiales), voir la section VI.3.2 p.169, ainsi que les exercices VI.8 p.189 et VI.13 p.191.
- Le théorème de *Molien*, exercice VII.6 p.219 permet de dénombrer le nombre de polynomes invariants indépendants.
- La détermination de la table des caractères est souvent un exercice de dénombrement, voir la section VII.4 p.209.

2 Leçons d'Analyse

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

- Il faut faire une section sur les espaces de Hilbert, et on peut alors parler du théorème de *Shannon* (exercice II.10 p.62) et de la projection associée.

Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Applications.

- Le théorème d'échantillonnage de *Shannon* (exercice II.10 p.62) permet de passer du discret au continu (faire une section sur l'interpolation).
- De façon pratique, l'interpolation se fait par « zero-padding », voir section IV.1.3 p.98 et exercice III.6 p.87.
- On peut parler d'interpolation spline, (exercices IV.12 p.128 et V.8 p.155).

Leçon 209 : Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.

- L'existence de base hilbertienne dans les espaces de Hilbert séparables est quelque chose de très forte (on oublie souvent que l'existence de bases dénombrables dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas évident !). Ainsi le théorème de *Shannon* (exercice II.10 p.62) fournit une base orthonormée de l'espace des fonctions à spectre borné, avec une formule de projection.
- On peut aussi citer la formule de *Poisson* (section II.3.3 p.48 et exercice II.9 p.62) qui est *la* formule qui permet de passer du discret dénombrable au continu (on peut aborder la théorie des distributions pour boucler la boucle).

Leçon 211 : Utilisation de la dimension finie en analyse.

- Il semble capital de présenter de nombreuses applications à la résolution pratique d'équations « continues ». La première source d'application est la résolution d'EDP par différences finies. Voir la section IV.4, les exercices IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5.
- On peut évoquer le fait que, lorsque l'on choisit de résoudre ces EDP en périodique, on tombe sur des problème de convolution, que l'on peut résoudre par FFT. Sinon, on peut toujours symétriser le problème et on se ramène à une transformée en sinus (équation de *Poisson*, section IV.4.3 p.114 et exercice IV.5 p.124).
- On peut aussi aborder la résolution de l'EDP de la chaleur en se restreignant à des polynômes trigonométriques (sommes tronquées), section IV.4.2 p.112.
- Comme introduction au traitement du signal, on peut évoquer différentes transformée discrète. La FFT bien sûr (chapitre I), mais aussi la DCT (exercice III.7 p.87). L'ondelette de *Haar* (exercice II.4 p.54) est une jolie introduction à la théorie des ondelettes.

Leçon 212 : Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

- En dimension finie, les méthodes de Fourier sont des méthodes hilbertiennes simples et très puissante. Il faut parler de l'orthogonalité des caractères, en parlant surtout du cas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec en puisse la puissance du théorème de convolution (chapitre I).

- On peut évoquer le fait que la FFT (chapitre III) permet de calculer de façon pratique la transformation.
- Enfin, les applications de la conservation de l'énergie sont multiples (principe d'incertitude exercices I.4 p.20, I.11 p.24 et I.9 p.23, inégalités géométriques section IV.3.1 p.106 sur les polygones).
- L'existence de base hilbertienne dans les espaces de Hilbert séparables est quelque chose de très forte (on oublie souvent que l'existence de base dénombrable dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas très intuitif !). Ainsi le théorème de *Shannon* (exercice II.10 p.62) fournit une base orthonormée de l'espace des fonctions à spectre borné, avec une formule de projection.
- L'ondelette de *Haar* (exercice II.4 p.54) est une jolie introduction à la théorie des ondelettes, dont l'un des buts est de fournir une base hilbertienne grâce à des translations et dilatations.

Leçon 213 : Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

- L'existence de base hilbertienne dans les espaces de Hilbert séparables est quelque chose de très fort (on oublie souvent que l'existence de base dénombrable dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas très intuitif !). Ainsi le théorème de *Shannon* (exercice II.10 p.62) fournit une base orthonormée de l'espace des fonctions à spectre borné, avec une formule de projection.
- L'ondelette de *Haar* (exercice II.4 p.54) est une jolie introduction à la théorie des ondelettes, dont l'un des buts est de fournir une base hilbertienne grâce à des translations et dilatations.

Leçon 220 : Équations différentielles $X' = f(t,X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

- Les systèmes dynamiques sont abordés brièvement à la section V.2.4. Le circuit RLC est fondamental, autant que la méthode d'analyse basée sur la transformée de *Laplace* (ou de Fourier).
- Il peut sembler judicieux, pour présenter les propriétés asymptotiques (ainsi que la notion de réponse fréquentielle) de faire le rapprochement avec le cas discret (équation aux différences récursives).

Leçon 221 : Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Voir leçon 220.

Leçon 222 : Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

- Voir leçon 220.

Leçon 223 : Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

- Le filtrage récursif (section V.2.2 p.137) est un excellent exemple de suite itérative, que l'on peut de plus étudier avec des outils puissant (transformée en Z, fonction de transfert).

- Faire la liaison avec la notion de stabilité (que l'on retrouve dans la résolution d'EDP numérique, comme l'équation de la chaleur, section IV.4 p.110 et exercice IV.2 p.121). Dire que l'étude de stabilité des problèmes définis par une convolution (i.e. $u_n = f * u_0$) se fait en Fourier. Ne pas trop insister car ce problème peut être vu comme un problème à valeurs vectorielles (contrairement au cas récursif).

Leçon 224 : Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
- Voir la leçon 223.

Leçon 225 : Rapidité de convergence d'une suite. Exemples.
- Voir la leçon 223. Dire que la rapidité de convergence (ou divergence) est géométrique, comme on le voit en Fourier (où plutôt en utilisant la transformée en Z).

Leçon 226 : Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
- Voir la leçon 223 pour les suites numériques.
- Pour les suites vectorielles, il est capital de présenter les applications à la résolution par différences finies d'EDP (section IV.4 p.110 et exercice IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5).
- On peut présenter de nombreuses variations autour du filtrage (en suplément des EDP discrétisées qui se résolvent par FFT). Par exemple le filtrage de polygones, section IV.3.1 p.106, les chaînes de *Markov* qui sont des convolutions itérées (exercices I.10 et surtout IV.10 p.127).

Leçon 232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
- Voir la leçon 302 et 305 pour les applications à la résolution numérique d'EDP.

Leçon 233 : Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.
- On peut évoquer les méthodes de quadrature, voir à ce sujet l'exercice V.7 p.104.

Leçon 235 : Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
- On peut parler de la formule de *Poisson*, section II.3.3 p.48 et exercice II.9 p.62, qui est très importante.
- L'exercice IV.5 p.121 repose sur une interversion.

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
- Il faut faire un paragraphe sur les méthodes de quadrature, voir à ce sujet l'exercice V.7 p.104.

Leçon 238 : Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale.

- Il faut faire un paragraphe sur les méthodes de quadrature, voir à ce sujet l'exercice V.7 p.104.
- Le calcul des intégrales de Fourier (section IV.1.2 p.97) au premier ordre permet d'utiliser la FFT.

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Bien sûr, on doit faire une section sur la transformée de Fourier (voir section IV.1 p.95).
- Comme application, on peut penser à la formule de *Poisson*, section II.3.3 p.49 et l'étude de la fonction θ.
- On peut aussi évoquer la transformée de *Laplace*, section V.2.4 p.143.

Leçon 240 : Transformation de Fourier et produit de convolution. Applications.

- Voir leçon 239

Leçon 241 : Suites et séries de fonctions: exemples et contre-exemples.

- On doit faire un paragraphe sur les séries de Fourier, avec en point de mire la résolution de l'équation de la chaleur (section IV.4.2 p.112 et surtout exercice IV.3 p.122).
- L'étude de la convergence des splines permet d'introduire la notion de fonction cardinale, qui s'obient en sommant la fonction de base (exercice IV.12 p.128).

Leçon 242 : Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

- Voir leçon 241.

Leçon 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Toucher un mot sur la transformée en Z pour illustrer le principe de convolution. Ceci signifie que le poduit de *Cauchy* est transformée en produit de fonction (section V.2 p.136).
- La transformée en Z (i.e. les séries entières sur $\mathbb{C}$) permet de calculer la fonction de transfert sur une couronne. Ceci permet d'attaquer le problème de stabilité (proposition V.2.10 p.140).
- Faire la connexion avec les séries de Fourier (il suffit d'évaluer la série entière sur le cercle), et dire que l'on retrouve le théorème de convolution des séries de Fourier.

Leçon 246 : Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

- Voir leçon 241.

Leçon 248 : Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.

- Faire un paragraphe sur l'interpolation. L'interpolation par les polynômes de *Chebyshev* est très importante, elle est optimale au sens de l'approximation polynomiale en norme L^∞, et se calcule de façon très rapide par une transformée en cosinus. Voir exercice III.7, p.97.
- Il y a quelques mots sur l'interpolation de Lagrange à la section IV.5.2 p.120.
- Enfin, il est très important de comprendre le rapport entre la FFT inverse et l'interpolation. La transformée de Fourier évalue un polynôme en les racines de l'unité, la transformée inverse calcule le polynôme d'interpolation en ses racines. Voir paragraphe V.5.2 p.119.
- L'interpolation par des splines est très employée dans la pratique. Voir l'exercice IV.12 p.128 pour une étude théorique, et le rapport avec l'interpolation de *Shannon*. L'exercice V.8 p.155 propose une méthode de calcul rapide.

Leçon 251 : Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

- Il est important de parler de convolution. Voir la remarque I.IV.13 p.18, qui est capitale. La philosophie est que plus l'on somme des v.a.i., plus on diffuse l'information (convolution, donc régularisation). Ceci est en accord avec le théorème central limite, qui dit qu'asymptotiquement, on tend vers la gaussienne, qui diffuse au maximum l'information pour une variance donnée.
- La connexion avec les fonctions spline est capitale. On part d'une répartition de masse 1 sur $[-1/2,1/2]$ et 0 ailleurs. En sommant n v.a.i. ayant cette répartition, on tombe sur la fonction spline d'ordre n. Voir l'exercice IV.12 p.128 qui montre que les splines tendent justement vers la gaussienne (c.f. TCL) : la boucle est bouclée.
- Les marches aléatoires et chaînes de *Markov* sont abordées à l'exercice I.10 p.23.
- Une belle application de la borne de *Hoeffding* est donnée à l'exercice VI.5 p.187.

3 Leçons de Calcul Scientifique

Leçon 302 : Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution de systèmes linéaires dans des problèmes issus de modélisations.

- On peut parler de la solution de l'équation de *Poisson*. La FFT (en fait ici la transformée en sinus) permet de résoudre les équation à l'aide des matrices cyclique. L'idée est d'écrire une équation $Ax = b$ sous la forme de convolution $a * x = b$ et de résoudre le tout dans le domaine de Fourier : $\widehat{x} = \widehat{b}/\widehat{a}$. Le paragraphe IV.4.3 p.114 présente le point de vue convolution, et l'exercice IV.5 p.124 propose une formulation matricielle (équivalente, il s'agit de diagonaliser la matrice cyclique).
- On peut aussi parler de la résolution de l'équation de la chaleur par différence finie. Le système linéaire est encore une fois une convolution, qu'on résout dans le domaine de Fourier. Très intéressant pour parler de la stabilité (que l'on analyse en Fourier, les valeurs propres du système sont la transformée de Fourier). Exercice IV.2, page 121.

Leçon 304 : Utiliser dans des problèmes issus de modélisations des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions.

- Le théorème de Shannon est le théorème central de la théorie l'information. Il décrit l'espace (de Hilbert) des fonctions que l'on peut reconstruire par échantillonage. Voir l'exercice II.10, par 62.
- La mis en pratique de ce théorème passe par la technique du « zero-padding », qui correspond à une interpolation par des polynômes trigonométrique (mise en œuvre rapide par FFT). Voir l'exercice III.6 p.87 pour la FFT, et l'exercice V.3 p.152 pour la transformée de *Hartley*.
- L'interpolation par les polynômes de *Chebyshev* est très importante, elle est optimale au sens de l'approximation polynomiale en norme L^∞, et se calcule de façon très rapide par une transformée en cosinus. Voir exercice III.7, p.97.
- Enfin, il est très important de comprendre le rapport entre la FFT inverse et l'interpolation. La transformée de Fourier évalue un polynôme en les racines de l'unité, la transformée inverse calcule le polynôme d'interpolation en ses racines. Voir paragraphe V.5.2 p.119.
- L'interpolation par des splines est très employée dans la pratique. Voir l'exercice IV.12 p.128 pour une étude théorique, et le rapport avec l'interpolation de *Shannon*. L'exercice V.8 p.155 propose une méthode de calcul rapide.

Leçon 305 : Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution de systèmes ou d'équations différentiels ou aux dérivées partielles dans des problèmes issus de modélisations.

- Le paragraphe IV.4 étudie les méthodes de Fourier pour la résolution d'EDP. Il y a aussi de nombreux exercices, comme IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5.
- Il faut bien insister sur le fait que la transformée de Fourier permet de résoudre directement des EDP du style de celle de la chaleur, mais la FFT permet aussi de résoudre des équations aux différences finie (qui correspond aux problemes

que l'on obtient lorsque l'on discrétise une EDP). Il convient de beaucoup insister sur les différences finies.

- On peut faire le lien avec le lissage d'image (convolution avec une gaussienne et résolution de l'équation de la chaleur ne font qu'un). Voir le paragraphe IV.4.2 (remarque 4.2 p.113) et l'exercice IV.6 p.124.

Leçon 306 : Application de la transformation ou des séries de Fourier – par exemple aux équations aux dérivées partielles

- Idem que pour la leçon 305, mais en instant sur la transformée de Fourier.
- Il faut expliquer comment on peut calculer les coefficient de Fourier à l'aide de la FFT (ordre 1), voir le paragraphe IV.4.1 p.111. Parler de la notion de série tronquées (ce n'est pas très bon numériquement à cause des phénomènes d'oscillation), paragraphe IV.4.2 p.112.
- On peut aussi parler de la dérivation fractionnaire, exo III.8 p.88, pour insister sur les propriétés de la TF vis à vis de la dérivation.
- Il est intéressant de connaître la démonstration théorique de l'existence et unicité de la solution de l'équation de la chaleur, exercice IV.2 p.121.

Leçon 307 : Exemples de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système différentiel. Interprétation sur un exemple.

- Bien sur parler de l'équation de la chaleur, du principe du maximum. Mais surtout parler de l'aspect régularisation de cette équation, expliquer que cette équation revient à filtrer par une gaussienne de variance de plus en plus grande. Expliquer que la résolution numérique revient à filtrer par un filtre discrète gaussien de plus en plus grand. Voir chapitre IV.
- On peut aussi parler de l'EDP de *Poisson*, de son interprétation en tant que potentiel ou que surface élastique.

Leçon 310 : Problèmes liés à la représentation des courbes et des surfaces.

- On peut parler de l'EDP de *Poisson*, dessiner la surface et parler de surface élastique.
- On peut parler de spline (cubique) et s'en servir pour interpoler une courbe en 2D (interpoler en X *et* en Y). Voir les exercices IV.12 p.128 et V.8 p.155.
- On peut parler de polygone, donc tout le paragraphe IV.3. Les descripteurs de Fourier sont très intéressant pour comparer des courbes polygonales.

Leçon 312 : PGCD, PPCM : méthodes de calcul et applications dans des problèmes issus de modélisations.

- On peut parler des codes correcteurs BCH qui sont construit à partir des PPCM des polynômes des classes cyclotomiques. Voir chapitre IV, p.174.

Leçon 313 : Applications des congruences ou des corps finis à des problèmes issus de modélisations.

- Tout le chapitre VI constitue une source d'idées. Tout d'abord, la construction de la transformée sur un corps fini, puis sur un anneau. Les applications sont tout d'abord la multiplication de grands entiers.

- La principale application attendue par le jury est sans doute les codes correcteurs. Voir section VI.3.
- L'utilisation des corps finis peut etre intéressante pour calculer des FFT. Par exemple l'algorithme chirp, exercice V.9, p.155.
- La transformée de Walsh, qui s'occupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$. Donner les formules de *MacWilliams*, avec les applications aux codes correcteurs, a la compression d'image exercice II.5.
- L'apprentissage de fonctions booléennes, exercice VI.5 (c'est assez dur).
- La transformée en ondelette sur $\mathbb{F}_p$, exercice VII.11 p.223 peut donner lieu à une étude passionnante.

4 Textes de Calcul Scientifique

Leçon 527 : Codes correcteurs d'erreurs.

- Le chapitre VI est à lire absolument pour se préparer à ce genre de texte qui tombent très souvent.

Leçon 577 : Autour d'un théorème de Shannon.

- Il peut sagir du théorème d'échantillonage (mais peut etre aussi du codage canal, qui lui utilise des arguments probabilistes). Voir exercice II.10 p.62.

Leçon 591 : Transformations orthogonales et compression.

- L'exercice II.5 p.56 permet d'aborder le problème de la compression d'image par l'intermédiaire de la transformée de *Walsh*.
- La transformée en ondelette (exercice II.4 p.54) s'étend en 2D et est très utilisée en compression.